

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА

ЯРОПУД ВОЛОДИМИР ОЛЕГОВИЧ

Допускається до захисту:
в.о. завідувача кафедри
прикладної математики та
кібербезпеки
Алла ЛУЦЕНКО

«___» _____ 2024р.

ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ АНАЛІЗУ БОЙОВИХ ДІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ
МОДЕЛІ ЛАНЧЕСТЕРА

Спеціальність 113 Прикладна математика

Кваліфікаційна (бакалаврська) робота

Науковий керівник:
Ветров О.С.,
старший викладач кафедри
прикладної математики та
кібербезпеки

Оцінка: _____ / _____ / _____
(бали/за шкалою ЄКТС/за національною шкалою)

Голова комісії: _____

Вінниця – 2024

АНОТАЦІЯ

Яропуд В.О Прикладні аспекти аналізу бойових дій за допомогою моделі Ланчестера. Спеціальність 113 «Прикладна математика». Донецький національний університет, імені Василя Стуса, Вінниця 2024.

У кваліфікаційній роботі досліджено моделей Ланчестера, що є математична формула для розрахунку відносних сил пари воюючих сторін. Розглядається застосування законів Ланчестера та адаптація їх під реалії сьогоденні правила ведення стрілецьких боїв.

Ключові слова: аналізу бойових дій, лінійний закон Ланчестера, квадратичний закон Ланчестера.

35 с., 6 рис., 22 джерела

Yaropud V.O. Applied Aspects of Analyzing Combat Operations Using the Lanchester Model. Specialty 113 "Applied Mathematics Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, 2024.

The qualification work investigates the Lanchester model, which is a mathematical formula for calculating the relative strengths of a pair of warring parties. The application of Lanchester's laws and their adaptation to the realities of today's rules of engagement are considered.

Keywords: analyzing combat operations, Lanchester's linear law, Lanchester's square law

35 pages, 6 figures, 22 references.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ПРО МОДЕЛЬ ЛАНЧЕСТЕРА	8
1.1. Огляд сучасної літератури з теми	8
1.2. Основні теоретичні припущення	11
1.3. Моделі Ланчестера	13
РОЗДІЛ 2. ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛІ	21
2.1. Дослідження моральної складової воїнів ЗСУ	21
2.2. Дослідження прикладних аспектів використання моделей	23
ВИСНОВКИ	31
ЛІТЕРАТУРА	33

ВСТУП

Сучасні бойові дії стають все більш динамічними та складними, що вимагає від військових аналітиків нових методів прогнозування та оцінювання їх результатів. Проєкт Uppsala Conflict Data Program [1], що відстежує та досліджує збройні конфлікти з 1975 року, визнають період 2022-2023 роки найбільш конфліктними за цей час їх аналізу. В звіті за 2023 році Міжнародного інституту стратегічних досліджень [2] охоплюється 183 військових конфліктів різних рівнів (рисунк 1). Цитуючи огляд збройних конфліктів 2023 [3], на рисунку 2 наводиться кількість військовослужбовців, задіяних в російсько-українській війні за 2016-2023 роки. Цифра, вказана для російсько-українського воєнного конфлікту, стосується російських військ, розгорнутих в Україні, оскільки остання є театром конфлікту. Зазначені цифри слабо корелюють з цифрами, що надають воюючи сторони, що є досить очевидним, бо точні цифри як задіяних у війні ресурсів, в тому числі і дані щодо військових втрат, є засекреченими, а цифри втрат супротивника, які повідомляють сторони, дуже часто є об'єктом маніпуляції та ІПСО.

Сторонні спостерігачі та експерти вказують свої оцінки втрат сторін і дають прогнози, хоча вочевидь не володіють точною інформацією, а послуговуються деякими даними з відкритих джерел. Подібні прогнози базуються головним чином на раніше побудованих математичних моделях, які з одного боку довели свою ефективність, спираючись на багаторічні дослідження, але водночас потребують постійної корекції, оскільки повномасштабна російсько-українська війна має ознаки «війни нового покоління», хоча і має спільні риси з характером бойових дій Першої та Другої Світових війн [4].

Одна з перших подібних математичних моделей – модель Ланчестера (також фігурує назва «модель Ланчестера-Осіпова»), розроблена на початку 20 століття на тлі Першої Світової війни, є достатньо ефективною

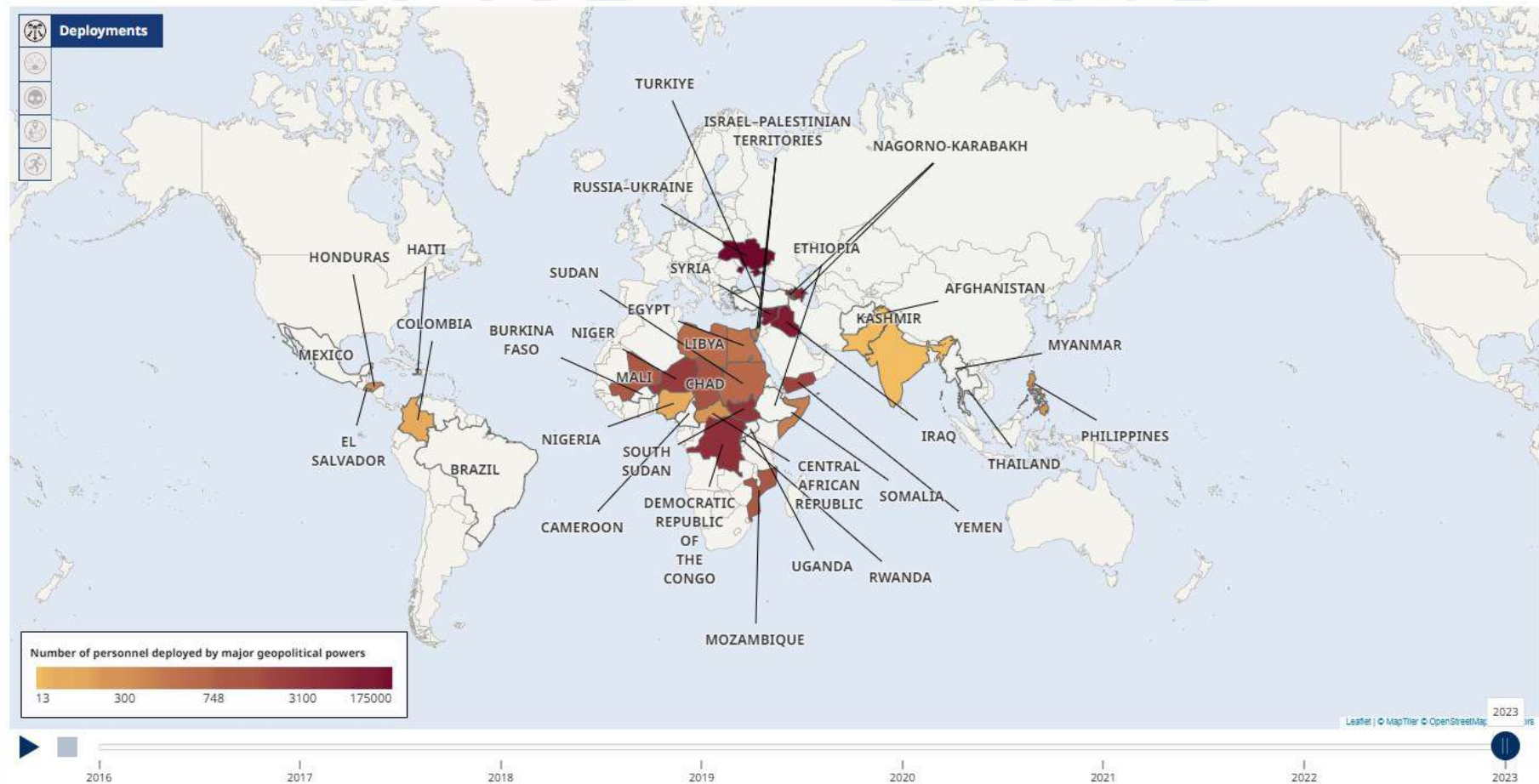


Рис. 1. Мапа динаміки розвитку конфліктів IIS (2023)

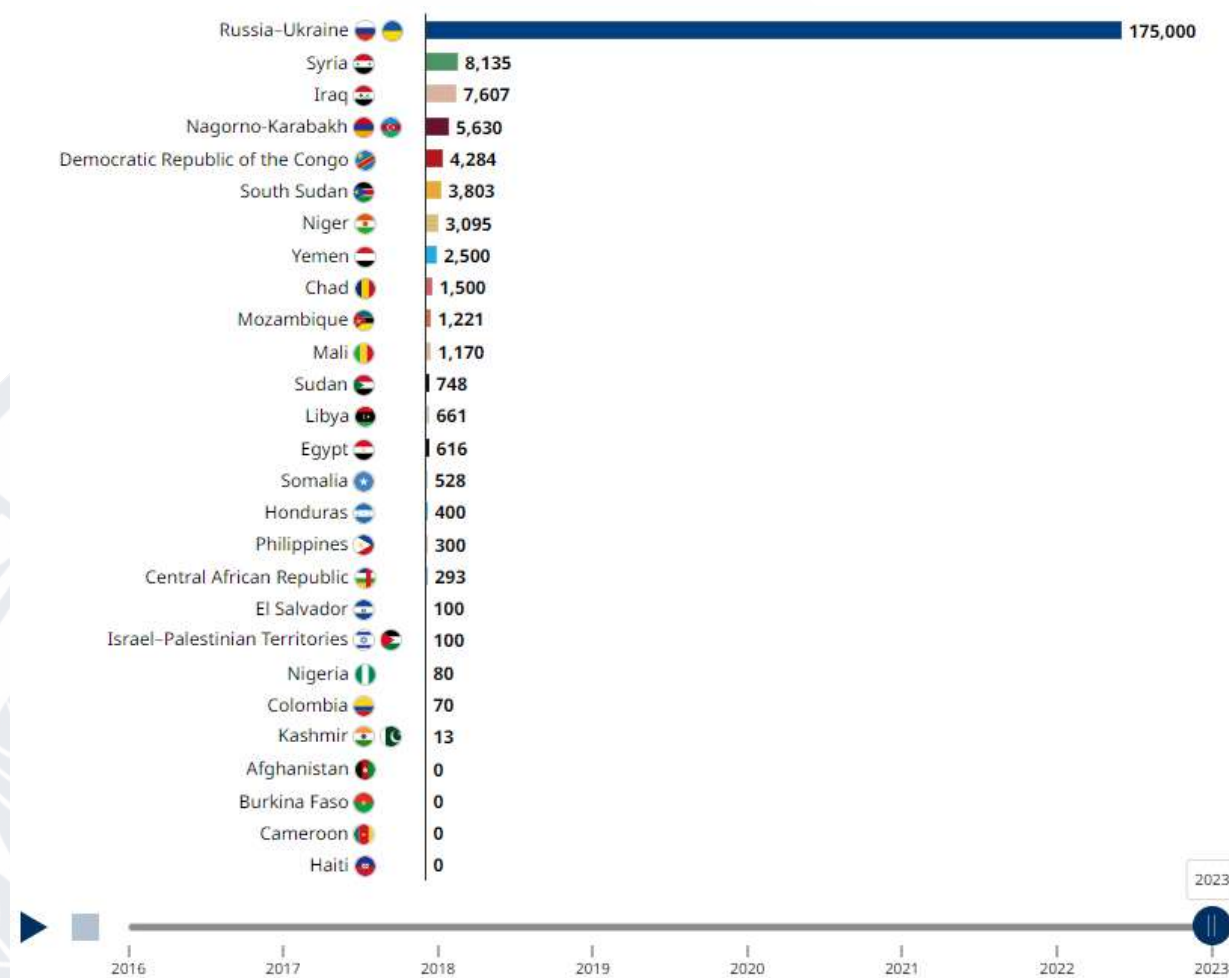


Рис. 2. Кількість задіяних військових у 2023 році [3]

і в нас час. Модель Ланчестера пропонує математичний інструментарій для аналізу процесів бойових втрат та динаміки зміни чисельності сил сторін, що беруть участь у бойових діях.

Різноманіття бойових дій охоплює широкий спектр подій від танкових наступів до обстрілів з безпілотних літальних апаратів. Модель Ланчестера може адаптуватися для аналізу цих дій, щоб зрозуміти динаміку конфлікту. Сучасні війни використовують нові технології, такі як морські дрони, супутниковий зв'язок, використання та кіберзброя. Ця модель може врахувати ці технології у своєму аналізі.

Модель Ланчестера допомагає прогнозувати втрати, оцінювати ефективність озброєння і допомагає у прийнятті рішень щодо стратегії. Хоча є і обмеження: поки що складно спрогнозувати кількість витрачених боєприпасів для враження ворога.

Метою і завданням роботи є дослідити прикладні аспекти аналізу бойових дій за допомогою моделі Ланчестера з прогностичної точки зору. Об'єктом дослідження: математичні моделі Ланчестера.

Предметом дослідження будуть виступати різні бої, вхідні дані з них, наприклад ландшафт, кількість особового складу, особливості погодних умов та інші фактори.

Методи дослідження: в силу складності природи бойових дій [5], що включають в себе багато факторів, які потрібно враховувати обумовила застосування декількох методів таких як: емпіричний метод, анкетування, статистичний аналіз. Ці методи можна комбінувати для отримання більш повного та об'єктивного розуміння теми.

Дипломна робота складається і вступу, двох розділів, та списку використаних літературних джерел, що налічують посилання (список літературних джерел впорядкований у порядку згадування у тексті роботи).

За матеріалами бакалаврського дослідження автором була опублікована робота у Віснику студентського наукового товариства Донецького національного університету імені Василя Стуса [6].

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ПРО МОДЕЛЬ ЛАНЧЕСТЕРА

1.1. Огляд сучасної літератури з теми

У кількісному плані в 2022-2024 роках значно зросло зацікавлення українознавчою проблематикою [7, 8]. У публікації [8] встановлено кількісно-якісні характеристики зарубіжного доробку з висвітлення російсько-української війни. Предметом дослідження стали статті з ключовими словами «Україна» та «війна» у назві у міжнародних наукометричних базах даних Scopus та Web of Sciences за 2023 рік. Серед іноземних наукових оглядів варто зазначити [4].

Серед великої кількості питань, що охоплюють сучасні публікації з воєнної тематики, специфічне місце займають питання математичного моделювання характеру бойових дій, і наскільки класичні моделі залишаються актуальними, враховуючи новий характер сучасних воєн.

Дослідження військових операцій і моделювання бойових дій застосовують математичні моделі для аналізу різноманітних військових конфліктів і отримання уявлення про ці явища. Одним з перших і найважливіших наборів моделей, що використовуються для моделювання бойових дій, є рівняння Ланчестера. Застарілі рівняння Ланчестера моделюють динаміку взаємного виснаження двох протидіючих військових сил і дають певне уявлення про долю таких зіткнень. У цій статті ми розглядаємо нещодавні розробки в галузі ланчестерського моделювання, зосереджуючи увагу на сучасних конфліктах у світі. Зокрема, ми представляємо моделі, які охоплюють нерегулярні війни, такі як повстання, висвітлюють роль інформації про цілі в таких конфліктах і охоплюють багатосторонні ситуації, коли в конфлікті беруть участь кілька гравців (як, наприклад, нинішня війна в Сирії) [9].

Під час Першої світової війни англійський інженер Ф.У. Ланчестер створив свої перші математичні моделі повітряних боїв [10] (варто зазначити, що в цей самий час генерал М. П. Осіпов описав математичну

модель глобального збройного протистояння, яку практично застосовують у військовій справі при описі динаміки втрат воюючих сторін, тому іноді в літературі використовується термін «модель Ланчестера-Осіпова» [11]). Ці моделі були застосовані до різних ситуацій – від бойових дій регулярних військ до битв за часів античності. Серед них виділяють так звані лінійні закони Ланчестера (першого роду або чесного бою, для рукопашного бою або неприцільного вогню) і квадратичні закони Ланчестера (для воєн починаючи з XX століття із застосуванням прицільного вогню, далекобійних знарядь, вогнепальної зброї) [12].

Зазначені математичні методи мають і суто прикладний вимір застосування. Аналітична компанія RAND у 2016 році використовуючи модель Ланчестера дослідила ймовірний результат російського вторгнення в країни Балтії [13]. Модифіковані варіації рівнянь Ланчестера продовжують складати основу аналізу в багатьох бойових симуляціях армії Сполучених Штатів Америки [14].

Зосередимось лише на деяких сучасних результатах.

Стаття [15] є вступом до двовимірних неперервних динамічних моделей війни, критично оцінюючи такі моделі і вказує про існуючі обмеження даних моделей. Розглядається широкий клас задач: гонка озброєнь Річардсона, моделі виснаження Ланчестера та партизанська модель Дейчмана. Досліджуються їхні комбінації та узагальнення, розуміючи, як вони співвідносяться з припущеннями про асиметричний конфлікт. Головний результат [15] полягає в тому, що типовим довгостроковим результатом є не знищення і не ескалація, а стабільна фіксована точка, патова ситуація.

За допомогою простих динамічних систем, можна дослідити основну динаміку різних моделей повстанської та багатосторонньої війни. У цьому розділі описано дві такі моделі. Перша поєднує гонку озброєнь між двома країнами Річардсона з моделлю виснаження Ланчестера і партизанським варіантом Дейчмана, створюючи модель, в якій типовим довгостроковим

результатом не є ані знищення, ані ескалація, а скоріше стабільна фіксована точка, патова ситуація. Масштаби, які вона передбачає для сили, необхідної для перемоги над повстанцями, збігаються з тими, що спостерігаються на практиці. Друга модель – це багатостороння війна на виснаження, в дусі багатонаціональної гонки озброєнь Річардсона. Ми описуємо випадок трьох антагоністів, метою яких є перемога, але, якщо вони не можуть перемогти, мінімізувати кількість опонентів, що залишилися [16].

Варто зазначити, що оскільки найчастіше інформація про характеристики бою здійснюється в дискретні моменти часу, то задача дискретизації моделі Ланчестера є досить практично важливою. При цьому відповідних дискретних аналогів зазначених моделей налічується порівняно небагато. Наприклад, у [17] модель подано як марковський процес із дискретними станами. Порівняння ефективності та точності дискретної та континуальної моделей залишається актуальною задачею.

1.2. Основні теоретичні припущення

Закони Ланчестера являють собою математичні формули для розрахунку відносних сил пари воюючих сторін [18]. Найбільш відомими і такими, що набули широкого поширення, є Ланчестерівські моделі, що використовують апарат диференціальних рівнянь для опису динаміки чисельності сил учасників військових конфліктів як функції від часу.

Уявімо, що в бойових діях беруть участь дві сторони – x і y . Чисельний склад цих сторін у момент часу t (вимірюваний в днях, починаючи з першого дня бойових дій) позначається як $x(t)$ і $y(t)$ відповідно. Чисельність сторін в цих моделях є важливим фактором, але врахування інших чинників, таких як бойова готовність, озброєння, досвід командирів, моральний настрій і багато інших, є практично неможливим завданням. Припустимо, що чисельність сторін $x(t)$ і $y(t)$ змінюється неперервно і є диференційованою функцією часу. Це спрощення, оскільки насправді $x(t)$ і $y(t)$ є цілими числами. Однак, при достатньо великій чисельності кожної сторони, збільшення чисельності на декілька осіб має практично незначний вплив порівняно з наявною чисельністю. Тому можна припустити, що протягом коротких проміжків часу чисельність змінюється незначно (не цілими кількостями). Це припущення недостатнє для виведення конкретних формул для $x(t)$ і $y(t)$ як функцій від t .

Можна вказати кілька факторів, що впливають на швидкість зміни чисельності сторін. Позначимо OLR як швидкість, з якою сторона x зазнає втрат від хвороб і інших факторів, що не пов'язані з бойовими діями. Далі, припустимо, що CLR представляє швидкість втрат стороною x внаслідок прямих зіткнень зі стороною y під час бойових дій. Позначимо RR як швидкість прибуття підкріплень до сил сторони x . Тоді рівняння для швидкості зміни $x(t)$ можна записати

$$dx(t) dt = -(OLR + CLR) + RR \quad (1.1)$$

Аналогічне рівняння буде використовуватись для $y(t)$. Тепер завдання полягає в тому, щоб визначити формули для OLR , CLR і RR , а потім дослідити отримані диференціальні рівняння. Отримані висновки допоможуть відповісти на питання про можливого переможця. Для сторони $y(t)$ також буде аналогічне рівняння. Задача полягає у визначенні формул для OLR , CLR та RR , а потім дослідженні отриманих диференціальних рівнянь. Отримані висновки дозволять відповісти на питання про потенційного переможця.

Далі використовуватимемо позначення:

- a, b, c, d, g, h – невід'ємні сталі, що відображають вплив різних факторів на втрати сил x та y ;
- $P(t)$ та $Q(t)$ – компоненти, що враховують можливість підсилення військ x та y протягом дня. x_0, y_0 – кількість сил x і y перед початком бойових дій.

1.3. Моделі Ланчестера

Випишемо математичні моделі, побудовані Ланчестором. Перша з них відноситься до бойових дій між регулярними військами, вона має такий вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -ax - by + P(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cx(t) - dy(t) + Q(t)\end{aligned}$$

У подальшому ця система буде називатись диференціальною системою типу А.

Друга модель

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -ax - gx(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -dy(t) - hx(t)y(t) + Q(t)\end{aligned}$$

Кожне з рівнянь, наведених вище, виражає швидкість зміни чисельності протиборчих сторін залежно від різних факторів і має форму (1.1). Втрати живої сили, які не пов'язані з бойовими діями і визначаються членами $-ax(t)$ та $-dy(t)$, дозволяють визначити постійні відносні швидкості втрат (у відсутність бойових дій та підкріплень) за допомогою рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} &= -a \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} &= -d\end{aligned}$$

Якщо в моделях Ланчестера присутні тільки члени, які відповідають підкріпленням та втратам, не пов'язаним з бойовими діями, це означає, що останні зовсім відсутні. Наявність членів $-by(t)$, $-cx(t)$, $-gx(t)y(t)$ і $-hx(t)y(t)$ вказує на наявність втрат. Розглядаючи систему типу А, припустимо, що обидві протиборчі сторони перебувають в зоні вогню і вогонь спрямовується лише на живу силу, яка безпосередньо бере участь у бойових діях. З цими уявленнями, Ланчестер пропонує ввести член $-by(t)$

для військових підрозділів сторони x , що відображатиме втрати y бою. Коефіцієнт b вказуватиме на ефективність бойових дій сторони y . Таким чином, рівняння

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = -b$$

показує, що стала b є одиницею вимірювання середньої ефективності кожної одиниці бойових сил сторони y . Аналогічні вирази можуть бути застосовані до члена $-cx(t)$. Зрозуміло, що визначення коефіцієнтів b і c є складним завданням. Один зі способів – подивитись на коефіцієнти у вигляді

$$b = r_y p_y, \quad c = r_x p_x \quad (1.2)$$

де r_y і r_x – коефіцієнти вогневої міці, сторін y і x відповідно, а p_y і p_x – це ймовірності, що кожен з пострілів зі сторони y і x відповідно виявиться влучним. Зазначимо, що в диференціальній системі типу A , члени, що відповідають бойовим втратам, є лінійними.

$$g = \frac{r_y A_{ry}}{A_x}, \quad h = \frac{r_x A_{rx}}{A_y} \quad (1.3)$$

Нижче подивимось більш детально на деякі диференційні моделі.

Припустимо, що регулярні війська двох протиборчих сторін ведуть бойові дії в тій спрощеній ситуації, коли втрати, не пов'язані з такими діями, відсутні. А тоді якщо обидві сторони не отримують ще й підкріплення, то математична модель зводиться до диференціальної системи

$$\frac{dx}{dt} = -by, \quad \frac{dy}{dt} = -cx. \quad (1.4)$$

Розділивши друге рівняння на перше, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} \div \frac{dy}{dt} &= -cx - by \\ \frac{dx}{dt} * \frac{dt}{dy} &= \frac{cx}{by} \end{aligned}$$

Після скорочень отримаємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by}$$

Тепер будемо інтегрувати дане рівняння за змінною x

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{c}{x} dx$$

Застосуємо відповідні правила: $\ln|y| = c \ln|x| + k$, де k - довільна константа інтегрування.

Тепер можемо використати вихідні умови, щоб знайти значення константи k . При підстановці $x = x_0$, $y = y_0$ отримаємо: $\ln|y_0| = c \ln|x_0| + k$

Віднімемо це рівняння від попереднього: $\ln|y| - \ln|y_0| = c \ln|x| - c \ln|x_0|$ Застосуємо властивості логарифмів

$$\ln \left| \frac{y}{y_0} \right| = \ln \frac{x^c}{x_0^c}$$

Повністю відкинемо натуральні логарифми, залишаючи тільки вирази у вигляді функцій:

$$\frac{y}{y_0} = \frac{x^c}{x_0^c}$$

Помножимо обидві сторони на y_0 і розділимо на x_0^c :

$$\left(\frac{y}{y_0} \right) * (x_0^c) = (x^c)$$

Із цього виразу отримуємо:

$$b[y^2(t) - y_0^2] = c[x^2(t) - x_0^2],$$

де $b = y_0 * (x_0^c)$ і $c = \left(\frac{1}{y_0} \right) * (x_0^c)$. Це співвідношення і пояснює, чому система відповідає моделі з квадратичним законом. Якщо позначити через K постійну $y_0^2 - x_0^2$, то рівняння

$$by^2 - cx^2 = K,$$

Отриманий результат задається гіперболою (парою прямих, якщо $K = 0$) і ми можемо більш точно класифікувати систему. Саме таку систему можливо назвати диференціальною системою з гіперболічним законом.

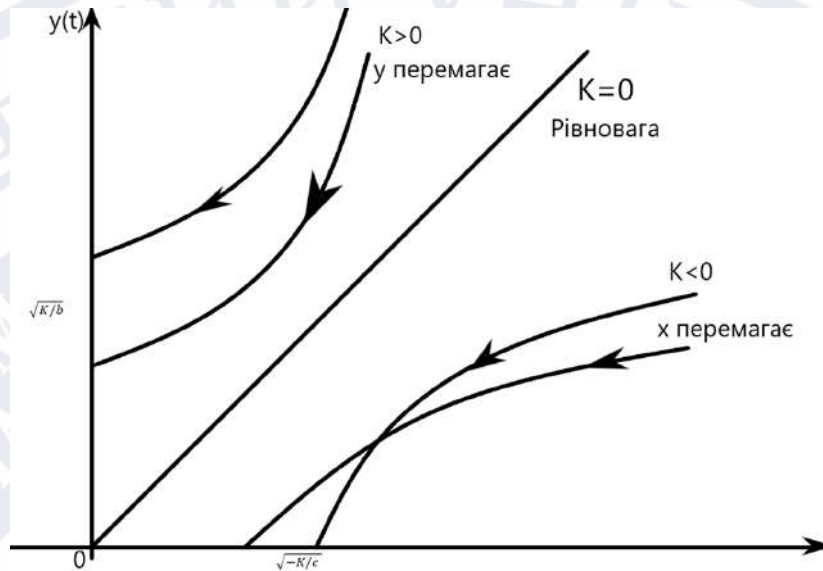


Рис.3. Приклад роботи моделі для гіперболічного закону

На рисунку зображено гіперболи для різних значень K . Обмежимося розглядом лише першого квадранту ($x \geq 0, y \geq 0$). Стрілки на кривих показують зміну чисельності сил з плином часу.

Щоб відповісти на питання про переможця у побудованій моделі (3), введемо угоду: сторона y (відповідно x) вважатиметься переможцем, якщо вона першою знищить бойові сили сторони x (відповідно y).

За цим угодженням, у нашому випадку сторона y перемагатиме, якщо $K > 0$. Це впливає з рівняння (5), оскільки змінна y ніколи не може стати рівною нулю, тоді як при $y(t) = \sqrt{K/b}$ змінна x стає нулем. Тому, для того щоб сили y перемогли, їм необхідно досягти умови $K > 0$, тобто коли

$$b * y_0^2 > c * x_0^2.$$

З нерівностей випливає, що отриманий результат можна переписати:

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{r_x p_x}{r_y p_y}.$$

Ліва частина нерівності демонструє, що зміни у співвідношенні між y_0 та x_0 надають перевагу одній стороні згідно з квадратичним законом.

Наприклад, зміни від $\frac{y_0}{x_0} = 1$ до $\frac{y_0}{x_0} = 2$ призводять до чотириразової переваги сил у.

Відмітимо далі, що рівняння визначає співвідношення між силами протидіючих сторін, не враховуючи час. Щоб вивести формули, які враховували б явно і час, зробимо наступне.

Продиференціюємо по t перше з рівнянь системи, а потім скористаємось другим рівнянням цієї ж системи. В результаті отримаємо таке диференціальне рівняння

Для диференціювання рівняння $\frac{dx}{dt} = -by$ по t , ми застосуємо правило диференціювання для добутку.

Отримуємо:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (-by)$$

За правилом ланцюгового диференціювання:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d(by)}{dt}$$

Тепер можемо записати рівняння у вигляді:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -b \left(\frac{dy}{dt} \right)$$

Друге рівняння системи $3 \frac{dy}{dt} = -cx$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + bcx = 0$$

Використовуючи тоді як початкові умови співвідношення

$$x(0) = x_0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -by_0$$

Почнемо з заміни $x(t) = e^{kt}$

$$\frac{d^2 e^{kt}}{dt^2} + bce^{kt} = 0,$$

звідки

$$k^2 e^{kt} + bce^{kt} = 0$$

або

$$(bc + k^2)e^{kt} = 0$$

Оскільки $e^{kt} \neq 0$ для будь-якого скінченного k , то нулі повинні походити від полінома

$$(bc + k^2) = 0$$

Корені цього рівняння буде $\begin{cases} k = i\sqrt{bc} \\ k = -i\sqrt{bc} \end{cases}$

Корінь $k = i\sqrt{bc}$ означає, що $x_1(t) = k_1 e^{-i\sqrt{bc}t}$ як один з можливих рішень де k_1 це довільна константа

Корінь $k = -i\sqrt{bc}$ означає, що $x_2(t) = k_2 e^{i\sqrt{bc}t}$ як один з можливих рішень де k_2 це довільна константа. Застосуємо формулу Ейлера $e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha} \cos(\beta) + i e^{\alpha} \sin(\beta)$. Тоді загальний розв'язок рівняння матиме вигляд:

$$x(t) = k_1 \cos(\sqrt{bc} t) + k_2 \sin(\sqrt{bc} t).$$

Тепер повернемося до наших умов

$$x(0) = x_0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -by_0$$

За цими умовами визначимо k_1 і k_2

$$k_1 = x_0$$

$$k_2 = -\frac{by_0}{\sqrt{bc}} \Rightarrow \sqrt{\frac{b}{c}} y_0$$

Розв'язавши рівняння, отримаємо

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{bc}t - \gamma y_0 \sin \sqrt{\frac{b}{c}} t.$$

Подібним чином отримаємо,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -cx \\ y(t) &= y_0 \cos \beta t - \frac{x_0}{\gamma} \sin \beta t \end{aligned}$$

На закінчення відзначимо, що для перемоги сил сторони у не обов'язково, щоб y_0 було більше числа x_0 . Потрібно лише виконати нерівність $\gamma y_0 > x_0$.

Лінійний закон рівняння динаміки, який моделює бойові дії двох протидіючих сторін, може бути легко вирішений.

Виключаються втрати, які не зв'язані з бойовими діями і сторони не отримують підкріплення. При таких обмеженнях диференціальна система типу В приймає вигляд

$$\frac{dx}{dt} = -gxy \quad \frac{dy}{dt} = -hxy$$

Розділимо друге рівняння із системи 3 на перше і отримаємо

$$\frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = -hy \div (-gx)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h}{g}$$

Тепер візьмемо інтеграл з отриманого

$$\int dy = \left(\frac{h}{g}\right) dx$$

$y(x) = (h/g)x + C$, де C - деяка стала інтеграції

Тепер ми можемо виразити C через точку (x_0, y_0) , через яку проходить крива $y(x)$:

$$y_0 = \frac{h}{g}x_0 + C$$

$$C = y_0 - \frac{h}{g}x_0$$

Підставимо C у вираз для $y(x)$

$$y(x) = \frac{h}{g}x + y_0 - \frac{h}{g}x_0$$

$$y(x) - y_0 = \frac{h}{g}(x - x_0)$$

Таким чином, ми отримали вираз $g[y(t) - y_0] = h[x(t) - x_0]$

Лінійна залежність пояснює чому нелінійна система відповідає законам з лінійними законами ведіння бою. Рівність можна представити у вигляді

$$gy - hx = L$$

де $L = gy_0 - hx_0$ звідси, впливає, якщо $L > 0$, то в результаті бойових дій перемагає сторона у, якщо ж $L < 0$, то перемогати буде ж сторона х.

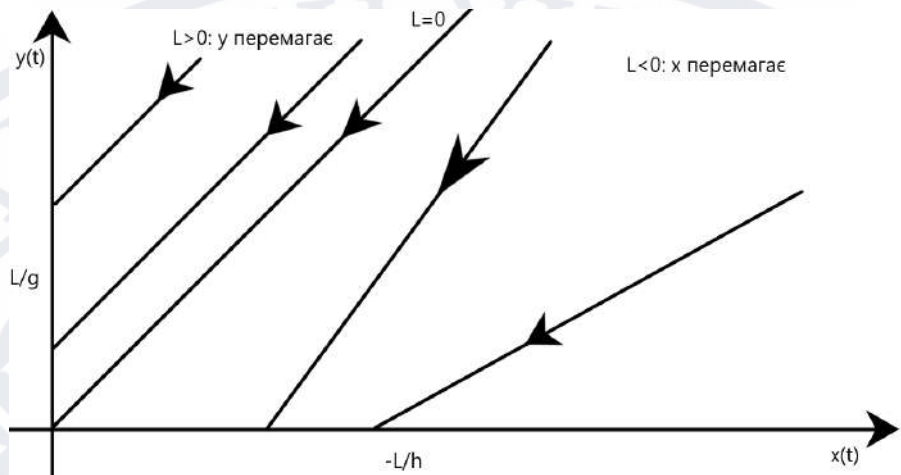


Рис. 4. Моделювання лінійного закону

Тоді, має і виконуватись рівність $gy_0 - hx_0$, після перетворень отримаємо, що $\frac{y_0}{x_0} > \frac{h}{g}$. Перетворимо $\frac{h}{g}$ після чого результат буде таким

$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{r_x A_{rx} A_x}{r_y A_{ry} A_y}$$

Таким чином, стратегія сил у буде у тому, щоб зробити відношення $\frac{y_0}{x_0}$ і мінімальні відношення $\frac{A_x}{A_y}$. З практичних точки зору нерівність 6 краще переписати у вигляді

$$\frac{A_y y_0}{A_x x_0} > \frac{r_x A_{rx}}{r_y A_{ry}}$$

Саме так ми можемо зрозуміти що, $A_y y_0$ і $A_x x_0$, є критичними величинами.

РОЗДІЛ 2. ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛІ

2.1. Дослідження моральної складової воїнів ЗСУ

Автором було проведено анкетування [19] 180 військовослужбовців, з чого можна зробити короткий аналіз, що має найбільший вплив на їх моральний стан.

Фактори, що підвищують моральний стан

1. Підтримка сім'ї: Найбільший позитивний вплив на моральний стан (160 відповідей).
2. Співпраця з товаришами по службі: Ключовий фактор у підтримці високого морального стану (120 відповідей).
3. Лідерство: Загалом сприймається позитивно більшістю (87 відповідей), хоча деякі негативні відгуки свідчать про наявність простору для покращення.
4. Ефективна комунікація: Високий рівень ефективності комунікації корелює з кращим моральним станом (78 дуже ефективна, 60 ефективна).
5. Чітке розуміння місії: Військовослужбовці, які чітко розуміють свою місію та завдання, мають вищий моральний стан (99 дуже чітко, 25 чітко).

Фактори, що знижують моральний стан

1. Системи підтримки: Багато респондентів вважають системи підтримки неефективними або дуже неефективними (45 і 58 відповідей відповідно).
2. Негативний вплив лідерства: Значна кількість респондентів сприймає лідерство негативно або дуже негативно (34 і 15 відповідей відповідно).
3. Недостатній доступ до забезпечення та обладнання: Це залишається проблемою для 55 респондентів.

4. Програми тренувань та підготовки: Хоча багато хто задоволений, все ж є значна кількість незадоволених військовослужбовців (16 незадоволені, 12 дуже незадоволені).

Аналіз, проведений автором, впевнено демонструє, що для підвищення морального стану необхідно зосередити зусилля на покращенні систем підтримки сім'ї, зміцненні співпраці між товаришами по службі, покращенні якості лідерства, забезпеченні ефективної комунікації та уточненні місії. Вирішення проблем з неефективністю систем підтримки та забезпечення достатнього доступу до забезпечення та обладнання також є критично важливим. Необхідне постійне покращення програм тренувань та підготовки для підтримання та підвищення морального стану військовослужбовців.

2.2. Дослідження прикладних аспектів використання моделей

Битва при Фермопілах [20, 21], яка відбулася в серпні або вересні 480 року до нашої ери, є одним із найвідоміших епізодів в історії античного світу. Вона стала символом героїзму і самопожертви, де невелика група греків, очолювана спартанським царем Леонідом, протистояла величезній перській армії під проводом царя Ксеркса I.

Згідно з лінійним законом Ланчестера, який був розглянутий вище, сила армії пропорційна кількості її солдатів. Швидкість, з якою одна сторона завдає втрат іншій, пропорційна кількості бійців на протилежній стороні. Математично це виражається як:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -gxy \\ \frac{dy}{dt} &= -hxy\end{aligned}$$

Де:

- y, x – кількість солдатів в армії греків та персів.
- g, h – це коефіцієнти ефективності бойових одиниць на полі бою.
- t – представляє одиницю часу

З наявної інформації

- Грецька армія (x): 11 000 солдатів
- Перська армія (y): 200 000 солдатів

Важливо зазначити, що військові дії відбувались на обмеженій площі, так що перська армія не мала значного впливу у вигляді своєї кількості. Деякі історики гадають що дорога на якій греки тримали оборону мала близько 100 метрів в ширину – цю величину і візьмемо для обрахунків.

Будемо вважати що грецька армія була ефективніша у 5 разів за перську, завдяки обмеженій географічній особливості перське військо не могло бути на рівні з грецьким, тому коефіцієнти g, h будуть такими $g = 5, h = 1$.

Для обрахунків втрат персів і греків скористаємось формулами

$$gy - hx = L$$

$$5 * 11\,000 - 1 * 200\,000 = -145\,000$$

з наведених вище даних, можна стверджувати, що грецьке військо у цій битві прогало б у будь якому разі.

Для сучасного стрілецького ми будемо розглядати, саме квадратний закон, тому що за визначенням він підходить краще, ніж аналоги

$$\frac{dx}{dt} = -by, \quad \frac{dy}{dt} = -cx$$

Перед створенням додатку, потрібно дослідити, що впливає на перебіг сучасного стрілецького бою:

- Спочатку введемо поняття щільності.

Щільність солдатів (ρ) визначається як кількість бойових на одиницю площі

$$\rho_x = \frac{x}{A}, \rho_y = \frac{y}{A},$$

де A – площа бойових дій

Ми припускаємо, що на коефіцієнти ефективності впливає щільність солдатів, що призводить до модифікованих коефіцієнтів

$$k'_x = k_x \rho_x, k'_y = k_y \rho_y,$$

- Далі ми представляємо множники моралі m_x, m_y . Коефіцієнти ефективності масштабуються за цими моральними факторами

$$k''_x = k'_x \rho_x m_x$$

$$k''_y = k'_y \rho_y m_y$$

Що після диференціювання принесе нам

$$k''_x = k_x \rho_x m_x$$

$$k''_y = k_y \rho_y m_y$$

- Нарешті, ми введемо вплив дронів. Нехай d_x та d_y - кількість дронів для сил x та y відповідно. Ми припускаємо, що коефіцієнти

ефективності додатково масштабуються на коефіцієнт, пропорційний кількості безпілотників

$$k'''_x = k''_x(1 + d_x)$$

$$k'''_y = k''_y(1 + d_y)$$

Це дає нам остаточні модифіковані коефіцієнти ефективності:

$$k'''_x = k_x \rho_x m_x (1 + d_x)$$

$$k'''_y = k_y \rho_y m_y (1 + d_y)$$

Тепер ми замінюємо ці модифіковані коефіцієнти назад у оригінальні рівняння Ланчестера

$$\frac{dx}{dt} = -k_y \rho_y m_y (1 + d_y) y$$

$$\frac{dy}{dt} = -k_x \rho_x m_x (1 + d_x) x$$

Якщо $\rho_y = \frac{y}{A}$, $\rho_x = \frac{x}{A}$, тоді

$$\frac{dx}{dt} = -k_y \frac{y}{A} m_y (1 + d_y) y$$

$$\frac{dy}{dt} = -k_x \frac{x}{A} m_x (1 + d_x) x$$

Що дасть нам фінальну форму нашої моделі сучасних бойових дій

$$\frac{dx}{dt} = -k_y \frac{y^2}{A} m_y (1 + d_y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -k_x \frac{x^2}{A} m_x (1 + d_x)$$

Після опису нашої моделі створимо додаток використовуючи мову програмування Python.

Вхідні дані цієї моделі будуть:

- Стартовий коефіцієнт ефективності
- Чисельність живої сили сторін
- Площа ведення бойових дій
- Моральна складова сторін
- Кількість дронів задіяних у бою

Нижче показаний сам код додатку і один з результатів

Лістинг 1.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

# Function to get user input for model parameters
def get_user_input():
    try:
        # Effectiveness coefficients
        k_R = float(input("Enter the effectiveness coefficient for
Red force (e.g., 0.05): "))
        k_B = float(input("Enter the effectiveness coefficient for
Blue force (e.g., 0.04): "))

        # Initial number of units
        R_0 = int(input("Enter the initial number of units for Red
force (e.g., 1000): "))
        B_0 = int(input("Enter the initial number of units for Blue
force (e.g., 800): "))

        # Area of the battlefield
        A = float(input("Enter the area of the battlefield in square
units (e.g., 10000): "))

        # Morale of the forces
        m_R = float(input("Enter the morale multiplier for Red
force (e.g., 1.2): "))
        m_B = float(input("Enter the morale multiplier for Blue
force (e.g., 0.9): "))

        # Number of drones
        d_R = float(input("Enter the number of drones for Red force
(e.g., 10): "))
```



```

    d_B = float(input("Enter the number of drones for Blue
force (e.g., 8): "))

    return k_R, k_B, R_0, B_0, A, m_R, m_B, d_R, d_B
except ValueError:
    print("Invalid input. Please enter numeric values.")
    return get_user_input()

# Get user input for parameters
k_R, k_B, R_0, B_0, A, m_R, m_B, d_R, d_B = get_user_input()

# Time span for the simulation
t_span = (0, 50)
t_eval = np.linspace(t_span[0], t_span[1], 500)

# Define the system of differential equations with density,
morale, and drones
def lanchester_square_law_density_morale_drones(t, y):
    R, B = y
    if R <= 0 or B <= 0:
        return [0, 0]
    rho_R = R / A
    rho_B = B / A
    dRdt = -k_B * rho_B * m_B * (1 + d_B) * B
    dBdt = -k_R * rho_R * m_R * (1 + d_R) * R
    return [dRdt, dBdt]

# Define an event function to stop the integration when any army
reaches zero
def event_stop(t, y):
    return min(y[0], y[1])

# Specify that the event should terminate the integration
event_stop.terminal = True
event_stop.direction = -1

# Solve the system of differential equations

```

```

sol = solve_ivp(lanchester_square_law_density_morale_drones,
t_span, [R_0, B_0], t_eval=t_eval, events=event_stop)

# Plot the results up to the stopping point
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(sol.t, sol.y[0], label='Red force (R)')
plt.plot(sol.t, sol.y[1], label='Blue force (B)')
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('Number of units')
plt.title('Lanchester\'s Square Law Battle Simulation with
Density, Morale, and Drones')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Print results
if sol.y[0][-1] <= 0:
    print("Red force has been defeated.")
elif sol.y[1][-1] <= 0:
    print("Blue force has been defeated.")
else:
    print("Neither force has been completely defeated.")

```

Результат роботи цієї програми буде: при значеннях 0.6, 0.7, 1000, 800, 1.2, 1.1, 2, 3.

Цю модель можна коригувати шляхом зміни початкових умов і коефіцієнтів ефективності для моделювання різних сценаріїв.

Перевіримо коректність роботи цього додатку на конкретному прикладі, а саме: бої за Сєвєродонецьк [22]. Візьмемо дані з відкритих джерел і внесемо ці дані у додаток. Потрібно розуміти, зробити примітку, так як, складно сказати за моральний стан бійців у той час, будемо вважати

моральних стан сторін рівним та кількість дронів буде по 1 дрону на 500 бійців.

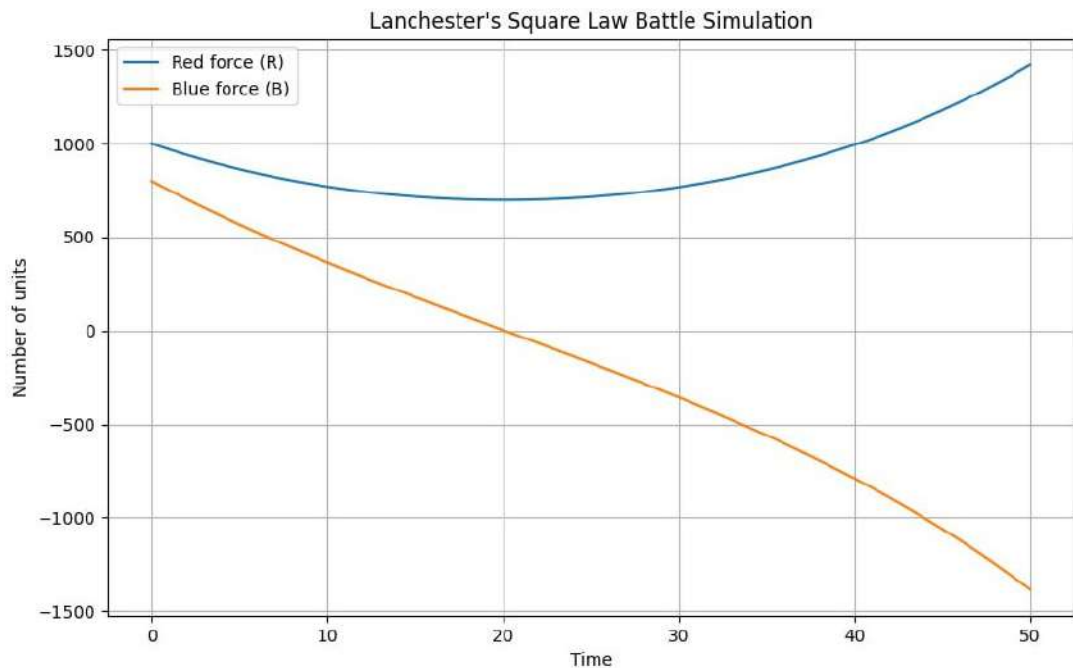


Рис 5. Приклад роботи програмного додатку

Вхідні дані у цю модель будуть такі Ефективність бойових сил України 0.07, Російської Федерації – 0.05. Коефіцієнти відрізняються, тому що у цьому випадку українська сторона веде оборонні дії в міській забудові, що додає ворогу складності у проведенні його дій. Кількість військових варіюється у різних джерелах [22], будемо брати середні дані з відкритих джерел, адже точні дані будуть озвученні тільки після війни Генеральним Штабом.

Тож нехай українські сили налічують 8 000 бій, сили противника будуть 17 000. Площа боїв буде площа самого міста 42 100 000 кв м.

Моральний стан в обох сторін буде рівний і буде дорівнювати 1. Кількість дронів, виходячи з наших роздумів буде в української сторони 20, у противника 34.

Внесемо ці дані у розроблений програмний додаток.

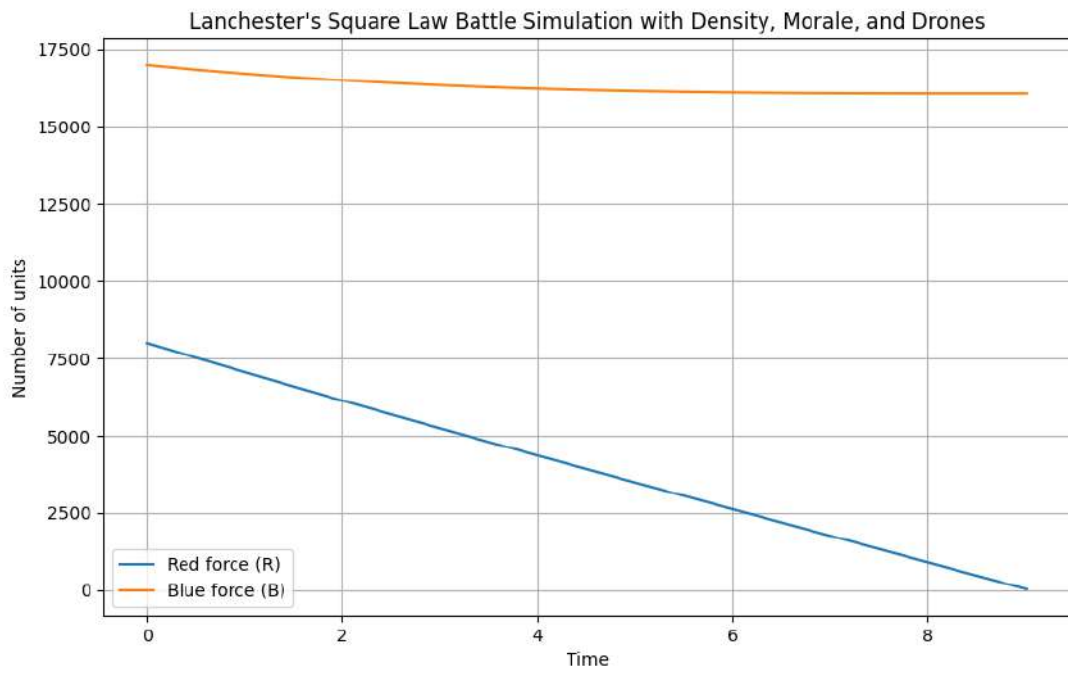


Рис. 6. Результат прикладної роботи додатку

Як можна побачити з цього рисунку, при активних бойових діях українські сили зазнали б повної поразки за 9 днів.

ВИСНОВКИ

У рамках представленої роботи було проведено детальний аналіз застосування моделей Ланчестера в контексті військових конфліктів, зокрема. Робота охопила як теоретичні аспекти моделей, так і практичні застосування на конкретних прикладах боїв.

Моделі Ланчестера показали свою здатність до прогнозування результатів битв за допомогою математичних рівнянь, які враховують чисельність військ, ефективність зброї та тактичні параметри. Наприклад, у битві за Маріуполь модель А передбачила поразку українських сил через значну перевагу противника у чисельності.

Однією з ключових переваг моделей Ланчестера є їх здатність інтегрувати різні фактори, такі як чисельність військ, обмундирування, ефективність зброї та тактичні параметри. Це дозволяє створювати комплексні стратегії та аналізувати різні сценарії розвитку конфлікту, що є важливим для військового планування та прогнозування.

Моделі Ланчестера базуються на певних припущеннях, які можуть не завжди відповідати реальним умовам. Наприклад, вони не враховують такі складні фактори, як точність влучання, економічні аспекти та політичні чинники, які також впливають на перебіг воєнних дій. Це обмежує точність прогнозів та вимагає обережного використання отриманих результатів.

У роботі були розглянуті конкретні приклади застосування моделей Ланчестера до реальних бойових дій. Наприклад, аналіз Битви при Фермопілах, що модель А передбачила поразку грецьких сил. Це демонструє практичну корисність моделей для аналізу та прогнозування результатів бойових дій.

Хоча моделі Ланчестера є корисними для аналізу бойових дій, їх точність може бути підвищена шляхом включення додаткових факторів, таких як технічне забезпечення, підготовка військових, моральний дух та

інші параметри, що впливають на результати боїв. Це потребує розробки більш комплексних моделей та підходів.

Таким чином, моделі Ланчестера є важливим інструментом для аналізу та прогнозування бойових дій, але їх застосування вимагає обережного підходу та врахування додаткових факторів для підвищення точності та надійності отриманих результаті.



ЛІТЕРАТУРА

- 1) Uppsala Conflict Data Program, Department of Peace and Conflict Research, 2024. URL: <https://ucdp.uu.se/> (дата останнього звернення 06.06.2024)
- 2) IISS Conflict Trends Map, URL: <https://www.iiss.org/en/publications/armed-conflict-survey/2023/iiss-conflict-trends-map/> (дата останнього звернення 06.06.2024)
- 3) Mia I. Armed Conflict Survey 2023: Editor's Introduction, 2023. URL: <https://www.iiss.org/en/publications/armed-conflict-survey/2023/editors-introduction/> (дата останнього звернення 06.06.2024)
- 4) Steinbach S. The Russia-Ukraine war and global trade reallocations / S. Steinbach // Economics Letters. – 226. – 2023. – 111075. <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2023.111075>
- 5) Горбенко В.М. Методичний підхід до визначення форм дій та способів застосування військових формувань у системі операцій збройних сил / В.М. Горбенко, В.В. Тюрін, О.А. Коршець // Наука і оборона. – 2. – 2019. – С. 29-34. <https://doi.org/10.33099/2618-1614-2019-7-2-29-34>
- 6) Яропуд В.О. Застосування моделей Ланчестера для аналізу російсько-української війни / Вісник студентського наукового товариства Донецького національного університету імені Василя Стуса. Випуск 16. Том 1 / ред. кол. М.І. Прихненко (голова) та ін. Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, 2024. – Вип. 16, Т. 1. – С. 165-168. <https://jvestnik-sss.donnu.edu.ua/article/view/15823/15724>
- 7) Жугай В.Й. Висвітлення російсько-української війни 2022 року у ЗМІ / В. Й. Жугай // Європейський вибір України, розвиток науки та національна безпека в реаліях масштабної військової агресії та глобальних викликів ХХІ століття» (до 25-річчя Національного університету «Одеська юридична академія» та 175-річчя Одеської школи права) : у 2 т. : матеріали Міжнар.наук.-практ. конф. (м. Одеса, 17 червня 2022 р.) / за загальною редакцією С. В. Ківалова. – Одеса : Видавничий дім «Гельветика», 2022. – Т. 1. – С. 847-851.

- 8) Кислюк К.В. Висвітлення російсько-української війни у дослідницьких статтях з міжнародних наукометричних баз Scopus та Web of Science за 2023 рік / К.В. Кислюк // Вісник МДУ. Серія: Філософія. Культурологія. Соціологія. – 26. – 2023. – С. 21-30 <https://doi.org/10.34079/2226-2830-2023-13-26-21-30>
- 9) Kress M. Lanchester Models for Irregular Warfare / M. Kress // Mathematics. – 8 (5). – 2020. – 737. <https://doi.org/10.3390/math8050737>
- 10) Lanchester F. Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm / F. Lanchester. – London: Constable and Co, 1916. – 243 p.
- 11) Helmbold R.L. Osipov: The ‘Russian Lanchester’ / R.L. Helmbold // European Journal of Operations Research. – 65. – 1993. – pp. 278-288.
- 12) Dupuy T. Understanding War. History and Theory of Combat / T. Dupuy. – Nova Publishers, 1998. – 312 p.
- 13) Shlapak D.A., Johnson M.W., Reinforcing Deterrence on NATO’s Eastern Flank. Wargaming the Defense of the Baltics, RAND Corporation, 2016. URL: https://www.rand.org/content/dam/rand/pubs/research_reports/RR1200/RR1253/RAND_RR1253.pdf
- 14) Christian J.T. An Examination of Force Ratios (Master’s thesis) / J.T. Christian // School of Advanced Military Studies US Army Command and General Staff College Fort Leavenworth, KS, 2019. – 37 p. <https://apps.dtic.mil/sti/tr/pdf/AD1083211.pdf>
- 15) Cangiott N. A generalization of unaimed fire Lanchester’s model in multi-battle warfare / N. Cangiotti, M. Capolli, M. Sensi // Operational Research. – 23, 38. – 2023. <https://doi.org/10.1007/s12351-023-00776-8>
- 16) MacKay N.J. When Lanchester Met Richardson, the Outcome Was Stalemate: A Parable for Mathematical Models of Insurgency / N.J. MacKay // In: Forder, R.A. (eds) OR, Defence and Security. The OR Essentials series. – Palgrave Macmillan, London. 2015. – pp 124-147. https://doi.org/10.1057/9781137454072_6

- 17) Дубограй І.В. Дискретна марковська модель двостороннього бою численних угруповань / І.В. Дубограй, В.Ю. Чуєв // Наука та освіта. – 10. – 2013.
- 18) Latchaw J.H. A Lanchester Model for Air Battles (Thesis) / J.H. Latchaw // Faculty of the School of Engineering of the Air Force Institute of Technology, 1972. – 87 p. <https://apps.dtic.mil/sti/citations/AD0741412>
- 19) Questionnaire, 2024. URL: <https://shorturl.at/DupaA> (дата останнього звернення 06.06.2024)
- 20) Bradford E. Thermopylae: The Battle for the West / E. Bradford. – Da Capo Press, 2004. – 256 p.
- 21) Cawkwell G. The Greco-Persian Wars / G. Cawkwell. – Oxford University Press. – Oxford University Press, 2006. – 336 p.
- 22) Wikipedia: Бої за Северодонецьк (2022). URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Бої_за_Северодонецьк_\(2022\)](https://uk.wikipedia.org/wiki/Бої_за_Северодонецьк_(2022)) (дата останнього звернення 06.06.2024)