

КРАВЦОВ МИХАЙЛО АНДРІЙОВИЧ

Допускається до захисту:
в. о. завідувача кафедри
прикладної математики та
кібербезпеки, д-р філософії
з математики

_____ Алла ЛУЦЕНКО
«__» _____ 20__ р.

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА
ПРОГНОЗУВАННЯ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ФІНАНСОВИХ ПРОЦЕСІВ**

Спеціальність 113 Прикладна математика
Кваліфікаційна (бакалаврська) робота

Керівник:
Половенко Л.П., доцент кафедри
прикладної математики та
кібербезпеки,

(підпис)
к.пед.н., доцент

Оцінка : _____ / _____ / _____
(бали/за шкалою ЄКТС/за національною
шкалою)

Голова ЕК:

(підпис)

АНОТАЦІЯ

Кравцов М. А. Математичне моделювання та прогнозування волатильності фінансових процесів. Спеціальність 113 «Прикладна математика», Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, 2024.

У кваліфікаційній роботі проведено огляд моделей прогнозування фінансового ринку в умовах стохастичної невизначеності; досліджено різні моделі сімейства GARCH та EGARCH для прогнозування нестабільності та умовної волатильності фондового ринку. Прогнозування волатильності здійснено на показниках фондових індексів і реалізовано мовою Python.

Ключові слова: фінансовий ринок, гетероскедастичні моделі, прогнозування, волатильність, індекс NASDAQ-100.

50 с. 7 табл. 23 рис. 48 джерел.

ABSTRACT

Kravtsov M. Mathematical modeling and forecasting of the volatility of financial processes. Specialty 113 «Applied Mathematics», specialization «». Donetsk National University named after Vasyl Stus, Vinnytsia, 2024.

In the qualifying work, an overview of financial market forecasting models under conditions of stochastic uncertainty was carried out; different GARCH and EGARCH family models for forecasting the volatility and conditional volatility of the stock market are investigated. Volatility forecasting was carried out on stock index indicators and implemented in the Python language.

Key words: financial market, heteroscedastic models, forecasting, volatility, NASDAQ-100 index.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ФІНАНСОВО ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ	5
1.1 Огляд моделей прогнозування фінансового ринку	5
1.2 Аналіз підходів моделювання гетероскедастичних процесів	7
1.3 Особливості прогнозування фінансового ринку в умовах стохастичної невизначеності.....	15
Висновки до розділу 1	17
РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЮВАННЯ І ПРОГНОЗУВАННЯ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ.....	18
2.1 Методика моделювання гетероскедастичних процесів	18
2.2 Аналіз фондового індексу NASDAQ-100.....	23
Висновки до розділу 2.....	32
РОЗДІЛ 3 ОБГРУНТУВАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МОДЕЛЕЙ ПРОГНОЗУВАННЯ	33
3.1 Порівняння моделей прогнозування на вибірці.....	33
3.2 Автоматизація прогнозування волатильності.....	37
Висновки до розділу 3	44
ВИСНОВКИ.....	46
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	47
ДОДАТКИ.....	53

ВСТУП

Сучасні методи аналізу фінансово-економічних процесів значною мірою ґрунтуються на використанні математичних моделей, які описують динаміку процесів, що характеризується великою невизначеністю та змінами. Виникає необхідність у вдосконаленні методів моделювання та прогнозування волатильності фінансово-економічних процесів (ФЕП). Підвищення точності прогнозів може слугувати ефективним інструментом для прийняття обґрунтованих управлінських рішень в умовах невизначеності.

Метою кваліфікаційної роботи є дослідження методик моделювання та прогнозування волатильності фінансово-економічних процесів, встановлення зв'язку між моделями і поведінкою волатильності активів, виявлення оптимального підходу до прогнозування волатильності на фінансових ринках.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні завдання:

1. Проаналізувати існуючі моделі прогнозування ФЕП та дослідити методики застосування моделей гетероскедастичних процесів.
2. Провести тестування даних на гетероскедастичність, вибрати оптимальні методи моделювання; проаналізувати обрані дані, порівняти різні моделі прогнозування волатильності.
3. Автоматизувати процес прогнозування волатильності та обґрунтувати ефективність запропонованих моделей.

Об'єктом дослідження є нестационарні гетероскедастичні фінансово-економічні процеси, а предметом - методи моделювання та прогнозування їх волатильності.

Для досягнення поставлених завдань використовуватимуться методи аналізу статистичних даних, тестування на гетероскедастичність, а також методи моделювання та прогнозування, зокрема гетероскедастичних процесів.

Науковою новизною є удосконалення гетероскедастичних моделей для прогнозування волатильності фінансово-економічних процесів та оцінка короткострокових прогнозів.

РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ФІНАНСОВО ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

1.1 Огляд моделей прогнозування фінансового ринку

Моделювання динаміки цін акцій виступає як ключовий аспект фінансової економіки, особливо у контексті теорій управління інвестиційним портфелем та оцінки фінансових інструментів. Традиційна модель управління портфелем, відома як сучасна теорія портфеля (MPT), яка ґрунтується на принципах диверсифікації Марковіца та моделі оцінки капітальних активів Шарпа-Дж.Лінтнера, застаріла через свою єдину передумову щодо динаміки цін. Ця передумова виявилася нереалістичною та навіть небезпечною з практичної точки зору [1]. Акційні доходи не виявляються незалежними між собою в часі, реалізуючи нормально розподілену випадкову величину. На сьогоднішній день продовжується пошук нової моделі, яка враховуватиме реалії фінансового ринку.

Емпіричні властивості цін акцій та різні моделі цінової динаміки розглядаються з огляду важливості поняття "волатильність цін". Прогнозування та моделювання волатильності відіграють важливу роль у дослідженні фінансових ринків. Великий обсяг емпіричної роботи був проведений дослідниками для вдосконалення моделей волатильності, оскільки точні прогнози сприяють ефективнішому ціноутворенню фінансових активів та кращому управлінню ризиками. З іншого боку, інтенсивне вивчення волатильності фондового ринку протягом останніх трьох десятиліть свідчить про значущий інтерес та обсяг наукової роботи в цьому напрямку

Кластеризація волатильності та лептокуртоз – це загально відоме явище в фінансових часових рядах [1]. Як відомо, фінансові прибутки характеризуються ненормальним розподілом з товстими хвостами. Мандельброт категорично відкидав ідею нормального розподілу доходів від активів, припускаючи, що фінансові віддачі мають властивості негауссівських

стабільних процесів, часто званих "стабільними паретіанськими" розподілами. Ще одним поширеним явищем є ефект кредитного плеча. Блек першим зазначив, що зміни в доходності акцій зазвичай взаємодіють зі змінами волатильності доходності, демонструючи підвищену волатильність у відповідь на "погані новини" і знижену у відповідь на "хороші новини". Це явище відоме як "ефект левериджу" і частково пояснюється не лише фіксованими витратами, такими як фінансовий та операційний левередж. Однак, асиметрія волатильності доходності акцій значно перевищує можливості повного пояснення цього ефекту левериджу.

Фінансові часові ряди, як правило, доступні з більшою частотою, ніж інші часові ряди (наприклад, макроекономічні). Було виявлено, що багато високочастотних фінансових часових рядів мають властивість "довгої пам'яті". Це означає, що інформація з минулого впливає на майбутні розрахунки, що свідчить про наявність довгострокової залежності. Зазначимо, що ця властивість довгої пам'яті пов'язана із частотою дискретизації часового ряду.

Ще однією важливою особливістю багатьох фінансових часових рядів є змінна в часі волатильність або "гетероскедастичність" даних. Термін "гетероскедастичність" відноситься до змінності волатильності (тобто дисперсії).

Ці характеристики дисперсії не можуть бути пояснені за допомогою стандартних лінійних моделей, таких як RW (Random Walk) і OLS (Ordinary Least Squares), оскільки ці моделі припускають сталу дисперсію. Проте, для аналізу змінної дисперсії використовуються спеціальні моделі, такі як авторегресійна умовна гетероскедастичність (ARCH) і узагальнена ARCH (GARCH), які дозволяють моделювати зміну умовної дисперсії. Ці моделі знайшли широке застосування в аналізі фінансових ринків після робіт Енгла і Боллерслева.

Гетероскедастичність дохідності акцій може бути пояснена шляхом вивчення поведінки змінних у відношенні до ефектів ARCH. Подальші

дослідження показали, що емпіричні часові ряди, зокрема ряди доходності активів, мають властивості, які можуть бути краще пояснені моделями ARCH і GARCH. Враховуючи це, волатильність активів і їх минулі ціни можуть служити сигналами для майбутньої поведінки вартості активів.

Гіпотеза ефективного ринку передбачає, що ціни активів відображають усю доступну інформацію, і ніхто не може здійснювати прибуткові інвестиції, користуючись лише минулими цінами активів. Однак, дослідження показують, що ринки не завжди відповідають умовам ефективного ринку, і волатильність і минулі ціни активів можуть бути використані для прогнозування майбутньої поведінки вартості активів.

Значення волатильності активів не лише важливе для інвесторів при прийнятті рішень щодо інвестування, але також впливає на стратегії хеджування, оцінку похідних фінансових інструментів та розподіл портфеля. Крім того, політики також проявляють інтерес до стабільності фінансових ринків і волатильність активів може мати важливе значення для оцінки ризиків, пов'язаних з фінансовими кризами.

1.2 Аналіз підходів моделювання гетероскедастичних процесів

Багато компаній, чії звичайні акції входять до індексів, що використовуються для розрахунку премій за ринковий ризик, регулюють ці премії за допомогою важелів. Незважаючи на сильний негативний зв'язок між премією за ризиком і несподіваною волатильністю на рівні фірми, який відзначається позитивною очікуваною залежністю між премією за ризиком і волатильністю, Блек і Крісті пропонують іншу інтерпретацію [47]. Вони вказують, що кредитне плече може викликати негативний постфактум ефект, тобто співвідношення між прибутковістю і волатильністю звичайних акцій, навіть якщо волатильність і очікувана прибутковість для всієї фірми є постійними.

Формула ціноутворення опціонів Блека-Шоулза та інші подібні моделі передбачають сталий параметр - волатильність базового активу. Однак, в практиці волатильність доходності багатьох активів, зокрема акцій, змінюється з часом. У літературі є безліч прикладів досліджень, що розглядають зміну волатильності капіталу в часі та її взаємозв'язок з іншими економічними факторами.

Крім зміни рівня волатильності з плином часу, акції також проявляють асиметрію, яка залежить від знаку прибутковості. Здається, що волатильність зростає, коли ціна акцій падає, і зменшується, коли вона зростає. Це явище, відоме як асиметрія в вимірюваній волатильності реалізованої доходності акцій, виявляється як в явній волатильності, так і в неявній волатильності опціонів. Модель EGARCH, запропонована Нельсоном, використовується для часткового моделювання поведінки асиметричної волатильності в сімействі GARCH. В залежності від ступеня левериджу в структурі капіталу базової компанії. Оригінальна стаття Black and Scholes (BS) [2] обговорює вплив левериджу на поведінку курсу акцій та розвиває цей аргумент у роботах Merton, Galai, Masulis та Gesuke. Вони використовують класичний принцип Модільяні і Міллера, згідно з яким фундаментальним активом корпорації є вся фірма, а цінні папери, що вона випускає - акції, облігації і т.д., - є просто різними способами розділу володіння цим майном. BS відзначили, що волатильність прибутковості акцій повинна повністю залежати від коливань загальної вартості фірми.

У фірмі, що має як власний, так і позиковий капітал, вимоги власників боргу щодо вартості фірми обмежуються номінальною вартістю облігацій. Тому (майже) всі зміни в загальній вартості фірми будуть перенесені в капітал, якщо тільки фірма наближається до неплатоспроможності. Припустимо, загальна вартість фірми збільшується. Оскільки власний капітал менший за загальну вартість фірми, пропорційна прибутковість акцій буде перевищувати прибутковість всієї фірми. Таким чином, акції фірми, яка використовує

позикові кошти, повинні бути більш волатильними, ніж акції всієї фірми, із різницею, яка залежить від відносних сум боргу і власного капіталу в структурі капіталу фірми.

Зв'язок з кредитним плечем також призводить до того, що волатильність акцій змінюється систематично і асиметрично з прибутковістю. Коли негативна прибутковість акцій призводить до зниження вартості власного капіталу, в той час як борг є фіксованим, кредитне плече фірми збільшується, збільшуючи волатильність капіталу в майбутньому. Зворотний ефект спостерігається при позитивній прибутковості акцій. Емпіричні докази, які підтверджують цей теоретичний аргумент, були представлені Крісті, який виявив позитивну кореляцію між ступенем левериджу на балансі фірми і волатильністю її акцій.

Ще одним показником очікуваної волатильності є торговані опціони на акції. Волатильність (IV), отримана на основі ринкових цін опціонів, розглядається як "ринковий" прогноз волатильності. Якщо це так, можна безпосередньо визначити вплив, який ця подія матиме на майбутню волатильність акцій, згідно з припущеннями Блека-Шоулза. Якщо насправді очікується, що волатильність акцій буде постійною і не пов'язаною з прибутковістю, волатильність повинна бути однаковою для кожного опціону на акцію при заданому терміні погашення. Графік залежності волатильності від ціни виконання буде рівною лінією з очікуваною волатильністю. Однак волатильність для опціонів на окремі акції і фондові індекси, як правило, демонструють дуже різні моделі.

Для більшості компаній спостерігається більша мінливість цін на акції, якщо їх поточна вартість значно відрізняється від очікуваного майбутнього курсу (гіперзмінні або гіподинамічні акції), ніж якщо вони торгуються близько до передбачуваного рівня (збалансовані акції). Волатильність капіталу, як правило, демонструє більш асиметричний характер зміни, часто називають "ухилом" або "посмішкою". Зі збільшенням ціни виконання спостерігається монотонне зниження міри флюктуацій.

Через "ефект підсилення", ринкова вартість опціону, який торгується зі значним відхиленням від поточної ціни базового активу, наприклад, буде вищою, ніж вартість за моделлю Блека-Шоулза для цього інструменту, тому й його міра коливань також буде відносно високою. Якщо ціна акції знизиться до рівня, за якого опціон опиниться ближче до поточної вартості, мінливість курсу акції також зросте, що додасть до вартості опціону. Аналогічно, підвищення курсу акцій зменшить її мінливість, скорочуючи ціни опціонів порівняно з опціонами, що торгуються близько до поточної вартості базового активу, як прогнозує модель постійної мінливості Блека-Шоулза.

Слід зазначити, що термін "ефект підсилення" використовується тут для опису будь-якої асиметричної реакції між доходами активів та їх мінливістю, навіть якщо базується на чомусь іншому, наприклад, обмінному курсі, для якого концепція підсилення не може застосовуватися буквально. Очевидно, що "ефект підсилення" для іноземної валюти не може фактично впливати з підсилення; має існувати інше пояснення для такої асиметрії. Але на фондовому ринку негативна кореляція між доходами та подальшою мінливістю сприймається як емпіричне підтвердження того, що фінансова важлива дія визначає мінливість цін акцій саме так, як передбачає теоретична модель. Проте скептики можуть запитати, наскільки інвестори обізнані про те, наскільки коливання цін акцій окремих компаній зумовлені поточними курсовими рухами в цілому, що має впливати на подальші зміни.

Наприклад, оцінки історичної волатильності, які широко застосовуються на ринку та базуються виключно на аналізі минулих доходів акцій, не враховують можливий вплив останніх на капіталову структуру компаній. Навіть коли застосовується модель стохастичної волатильності сімейства GARCH, параметр "леверидж" тлумачиться лише як оцінюваний за даними коефіцієнт, а не як параметр, що пов'язаний із реальною капіталовою структурою підприємства. Тобто важливий взаємозв'язок між коливаннями доходів та зміною важеля фінансування не враховується. Це може призводити до неточності оцінок історичної волатильності, оскільки не відображає повної

картини факторів, що її визначають. Для отримання більш якісних прогнозів потрібно на основі аналізу фінансової звітності оцінювати реакцію капіталової структури на коливання прибутків та враховувати її.

Також гетероскедастичність використовується при оцінці ринкового ризику у методі Value-at-Risk (VaR).

Таблиця 1.1 – Гетероскедастичність в оцінці ринкового ризику за допомогою VaR

Характеристика	Опис
Що таке гетероскедастичність?	Нерівномірність дисперсії даних, коли вона змінюється залежно від значення незалежної змінної.
Як гетероскедастичність впливає на VaR?	Знижує VaR, не враховуючи періоди з високою волатильністю, що може призвести до недооцінки ризику.
Як можна врахувати гетероскедастичність при оцінці VaR?	1. Використання моделей, що враховують гетероскедастичність, наприклад, ARCH/GARCH. 2. Застосування ковзаючого вікна з адаптивним горизонтом. 3. Використання модифікованих VaR, наприклад, CVaR.
Переваги врахування гетероскедастичності	1. Більш точна оцінка ризику. 2. Краще управління ризиком. 3. Зменшення ймовірності значних втрат.
Недоліки врахування гетероскедастичності	1. Більш складні розрахунки. 2. Потреба в більшій кількості даних. 3. Можливість помилок при моделюванні.

Якщо порівняти стандартний показник VaR із урахуванням гетескедастичності, то в стандарті – 10% а з гетеоскедастичністю – 15%.

Врахування гетероскедастичності при оцінці VaR може значно поліпшити точність оцінки ризику. Це, в свою чергу, може допомогти прийняти більш обґрунтовані рішення щодо управління ризиком.

Коли ринкова волатильність зростає або знижується, фінансові веб-сайти, блоги, соціальні мережі, друковані видання та телебачення часто посиляються на показник VIX. Формально відомий як Індекс волатильності CBOE, VIX розроблений спеціально для відстеження коливань цін індексу S&P 500.

Більшість інвесторів, які обізнані з VIX, традиційно називають його "індикатором ризику", оскільки він відображає рівень невизначеності на ринку. VIX є індексом реального часу, який базується на цінах опціонів з короткими термінами дії на S&P 500 та прогнозує майбутню 30-денну волатильність цього індексу.

Ринкова волатильність звичайно розглядається як показник ризиковості та настрою учасників ринку. VIX часто іменують просто за символом торгів CBOE та він є важливим орієнтиром для оцінки ризиків та настроїв серед інвесторів, оскільки кількісно відображає рівень невизначеності. Індекс було створено та підтримується Чиказькою біржею опціонів Cboe Global Markets.

Роглянемо опис індексу VIX:

- Індекс волатильності CBOE (VIX) відображає очікування ринку стосовно майбутньої волатильності S&P 500 протягом наступних 30 днів. Він є показником ринкових очікувань в реальному часі.
- Інвестори користуються VIX для оцінки поточного рівня невизначеності та ризиків на ринку при прийнятті інвестиційних рішень. Високі значення VIX свідчать про зростання страху серед учасників ринку.
- Трейдери можуть торгувати самим індексом VIX за допомогою опціонів та ф'ючерсів, або використовувати його значення для оцінки цін похідних фінансових інструментів, пов'язаних із S&P 500.

Наприклад, розглянемо динаміку цін акцій компаній Texas Instruments (TXN) та Eli Lilly (LLY) протягом квітня 2024 року. 29 квітня ціни їхніх акцій становили приблизно \$179,02 та \$737,06 відповідно. Проте аналіз їхніх цінових змін протягом попереднього місяця свідчить, що TXN (показано синьою лінією) демонструвала більш значні коливання порівняно з LLY (оранжева лінія).

Тобто, протягом досліджуваного періоду волатильність акцій TXN була вищою, ніж волатильність акцій LLY. Це означає, що ціна акцій TXN зазнавала більших змін та була менш стабільною порівняно з ціною акцій LLY.

Оцінка волатильності є однією з ключових тем у фінансах, оскільки нестабільність фінансових активів є важливою характеристикою для вимірювання ризику в інвестиційних рішеннях [6]. Існує кілька методів оцінки волатильності, включаючи історичну волатильність, яка ґрунтується на дисперсії/стандартному відхиленні прибутковості за певний період [7]. Також використовується прихована волатильність, яка розраховується з цін опціонів, застосовуючи формулу Блек-Скоулза [8].

Моделі експоненційно ковзного середнього використовуються для моделювання нестабільності, дозволяючи останнім подіям мати більший вплив і запобігаючи штучному підвищенню волатильності, яке може виникнути при застосуванні простішої історичної моделі [9]. Моделі авторегресивної волатильності враховують вплив минулих значень на поточні, що робить їхню оцінку більш гнучкою [10].

Також існують ARMA-моделі, що комбінують авторегресію та рухливий середній для відображення ефектів учасника ринку та характеристик шокової інформації. Ці різні методи оцінки волатильності надають інвесторам інструменти для кращого розуміння та управління ризиком у фінансовому світі.

Існують переконливі свідчення того, що моделі GARCH з ненормальним розподілом є ефективнішими у прогнозуванні волатильності порівняно з іншими історичними моделями [11]. Два найбільш розповсюджені методи моделювання волатильності - це моделі ARCH (авторегресивна умовна гетероскедастичність) [12] та GARCH (загальна авторегресивна умовна гетероскедастичність) [13; 14]. Модель GARCH є розширенням моделі ARCH, яка враховує різницю між умовною та безумовною дисперсією, дозволяючи умовній дисперсії змінюватися з часом як функція минулих помилок [13]. Вона також дозволяє збільшити пам'ять і отримати більш гнучку структуру відставань, що робить цю модель нелінійною.

Класична модель лінійної регресії передбачає гомоскедастичність, тобто постійну дисперсію помилок ($\epsilon_t = \sigma^2$). Однак у реальних умовах

гетероскедастичність, коли дисперсія помилок не є постійною, є більш доцільною. Якщо помилки є гетероскедастичними, але їх вважають гомоскедастичними, це може призвести до неточних стандартних оцінок помилок. Ряд досліджень присвячений вивченню передбачувальних можливостей моделей GARCH упродовж років, що підкреслює їх важливість у прогнозуванні волатильності.

Пейган та Шверт провели дослідження щодо прогнозування щомісячного доходу GARCH в США, експоненційного GARCH (EGARCH), режиму перемикавання Маркова (MRS-GARCH) та трьох непараметричних моделей. Вони виявили, що моделі GARCH та EGARCH показали помірні результати, тоді як інші моделі мали низькі показники. У роботі Франсес та Дейк порівнювались моделі GARCH, квадратичний GARCH (QGARCH) та GJR для прогнозування тижневої волатильності європейських фондових індексів. Згідно їхнім висновкам, нелінійні моделі GARCH не перевершували звичайну модель GARCH у випадку наявності екстремальних спостережень. Брейлсфорд та Фафф досліджували ефективність моделей GJR та GARCH у прогнозуванні мінливості австралійських фондових індексів і прийшли до висновку, що вони перевершують інші моделі прогнозування.

Хансен і Лунде порівнювали кілька моделей для визначення еволюції моделей волатильності та їхнього впливу на прогнози. За їхніми даними, модель GARCH (див. додаток а) не перевершувала інші моделі для щоденних повернень в США. Маркуччі досліджував здатність передбачення режиму перемикавання Маркова та моделей GARCH на різних горизонтах, від одного дня до одного місяця. Його висновок показав, що MRS-GARCH значно перевершує стандартні моделі GARCH на коротших горизонтах.

Набір досліджень ефективності моделей GARCH на п'яти щоденних індексах фондового ринку Куала-Лумпура вказав на те, що модель EGARCH виявилася кращою за інші варіації моделей GARCH, і що модель IGARCH не є рекомендованою для прогнозування волатильності.

Аартані і Корралі отримали подібні результати для індексу S&P 500, скоригованого на дивіденди, вказавши на те, що моделі асиметричної волатильності, зокрема EGARCH, поліпшують прогнозування порівняно з моделлю GARCH для короткострокового та середньострокового горизонтів.

1.3 Особливості прогнозування фінансового ринку в умовах стохастичної невизначеності

Розглянемо особливості прогнозування в умовах стохастичної невизначеності. Як в умовах війни веде себе ринок, якщо застосувати модель стохастичного хаосу.

Відомі гетероскедастичні моделі не можуть пояснити безліч емпіричних закономірностей на фондових ринках, включаючи хаотичні структури, і забезпечити прийнятну якість прогнозування при оцінюванні ринкових ризиків.

Тому вчені пропонують застосування моделей стохастичного хаосу для відображення взаємозв'язків між фінансовими активами. Це може сприяти підвищенню ефективності інвестиційних стратегій на фондових ринках [48].

Вчені вважають, що в загальній моделі можна врахувати детерміновану і стохастичну природу часового ряду. Присутність на фінансових ринках агентів-спекулянтів створює значний шум, який може бути змодельований, залежно від наявних характеристик:

1) висока волатильність, що спостерігається на ринках, може мати всі ознаки ARCH-ефекту: кластери волатильності, висока гетероскедастичність тощо, тому може бути змодельована за допомогою класичної моделі типу GARCH;

2) шум, створюваний агентами-спекулянтами, може містити структури з довгою пам'яттю, а модель GARCH, що включає цей тип структури, може бути

об'єднана з хаотичною моделлю для опису еволюції фінансового часового ряду;

3) різні режими волатильності на фінансовому ринку відображають боротьбу між прихильниками фундаментального і технічного аналізу за домінування, тому доцільніше використовувати моделі стохастичного хаосу з перемиканням режимів [48].

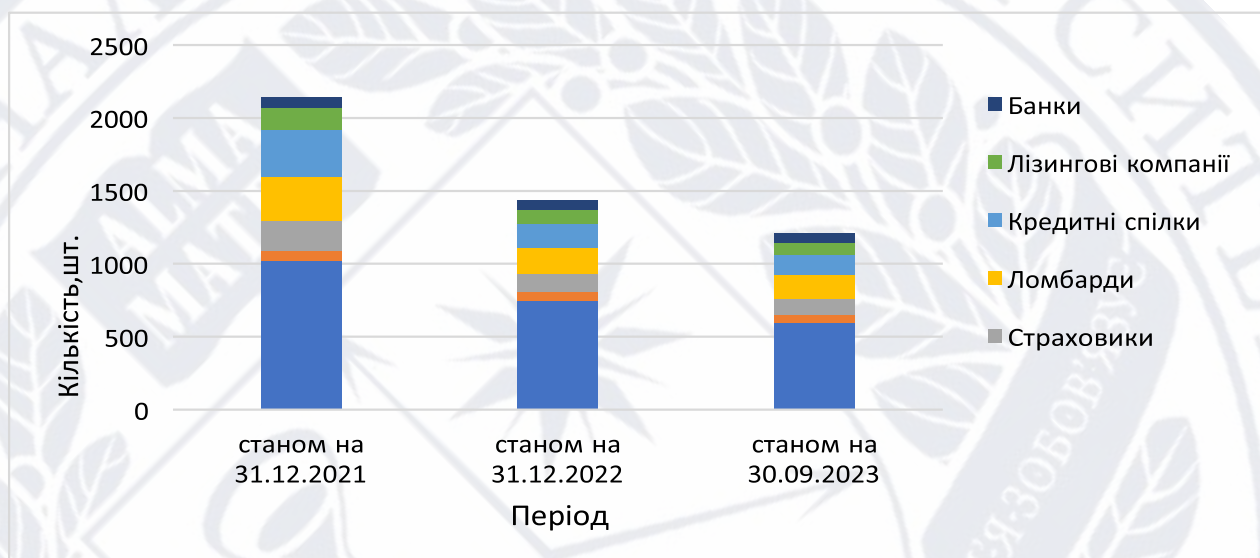


Рисунок 1.1 – Динаміка зміни кількості учасників фінансового ринку[49]



Рисунок 1.2 – Динаміка обсягу випуску акцій протягом січня-серпня відповідного року, млрд грн

За цими графіками ми може зрозуміти, що на даний момент фондовий ринок України є нестабільним.

Висновки до розділу 1

Ризик став невід'ємною частиною фінансового аналізу, служить як для управління ризиками, так і для виконання регулювання. Важливо відрізнити волатильність від ризику, хоча можна розглядати її як міру ризику. У фінансах волатильність визначається як зміна фінансового активу протягом певного періоду часу, вимірювана за стандартним відхиленням прибутковості. Це вказує на ризик зміни вартості активу. Висока волатильність свідчить про можливі великі зміни в цінності, тоді як менша волатильність означає менші очікувані зміни. Здатність прогнозувати волатильність фінансового ринку є важливою для вибору портфеля та управління активами, а також для ціноутворення первинних та похідних активів. З урахуванням того, що нестабільність не можна прямо спостерігати, оцінка моделей волатильності стає важливим завданням.

Модифікації GARCH, як розширення моделі ARCH, спрямовані на отримання кращих прогнозів умовної волатильності. Додаткові характеристики, додані до традиційної моделі GARCH, враховують різні атрибути прибутковості, які мають значний вплив при оцінці умовної волатильності. Досліджено різні моделі з сімейства GARCH для прогнозування нестабільності та умовної волатильності на фондовому ринку.

РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЮВАННЯ І ПРОГНОЗУВАННЯ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

2.1 Методика моделювання гетероскедастичних процесів

Методика моделювання гетероскедастичних процесів може включати в себе використання різних моделей, таких як ARCH (авторегресивна умовна гетероскедастика) та GARCH (загальна авторегресивна умовна гетероскедастика) [див.табл 2.1].

1. ARCH та GARCH моделі: Використання авторегресивних умовних гетероскедастичних моделей, таких як ARCH і GARCH, є популярним підходом. ARCH модель фокусується на умовній дисперсії, яка залежить від попередніх лагів квадратів залишків. GARCH модель доповнює ARCH, дозволяючи умовній дисперсії залежати від попередніх лагів як самої дисперсії, так і лагів квадратів залишків.

2. Визначення підходу до даних: Збір та аналіз часових рядів для виявлення гетероскедастичних змін в дисперсії. Графічний аналіз та огляд автокореляційних функцій можуть допомогти визначити, чи є присутність гетероскедастичності.

3. Оцінка параметрів: Використання методу максимальної правдоподібності для оцінювання параметрів моделі, таких як коефіцієнти ARCH та GARCH.

4. Тестування гіпотез: Використання статистичних тестів, таких як тест Уайта або тест Голдфельда-Квандта, для перевірки гіпотез про гетероскедастичність.

5. Прогнозування та застосування: Використання побудованих моделей для прогнозування та управління ризиками у фінансових аналізах чи інших областях.

Таблиця 2.1 - Методика моделювання гетероскедастичних процесів

Метод	Формула	Характеристика	Функції	Переваги	Недоліки
ARCH	$\sigma^2_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon^2_{t-1} + \dots + \alpha_q \varepsilon^2_{t-q}$	Умовна дисперсія залежить від квадратів похибок попередніх періодів	Моделювання волатильності фінансових ринків	Простий у використанні, добре описує динаміку волатильності	Не враховує асиметрії та автокореляції похибок
GARCH	$\sigma^2_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon^2_{t-1} + \dots + \alpha_q \varepsilon^2_{t-q} + \beta_1 \sigma^2_{t-1} + \dots + \beta_p \sigma^2_{t-p}$	Умовна дисперсія залежить від квадратів похибок та умовної дисперсії попередніх періодів	Моделювання волатильності фінансових ринків, прогнозування ризику	Гнучкий, може описувати різні типи волатильності	Складніший у використанні, ніж ARCH
EGARCH	$\ln(\sigma^2_t) = \omega + \alpha_1$	ε_{t-1}	$+\gamma \varepsilon_{t-1} + \beta_1 \ln(\sigma^2_{t-1})$	Умовна дисперсія залежить від модулів та знаків похибок попередніх періодів	Моделювання волатильності з асиметрією
STARARCH	$\sigma^2_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon^2_{t-1} + \dots + \alpha_q \varepsilon^2_{t-q} + \beta_1 \sigma^2_{t-1} + \dots + \beta_p \sigma^2_{t-p} + \gamma d_t$	Умовна дисперсія залежить від квадратів похибок, умовної дисперсії попередніх періодів та індикаторної змінної	Моделювання волатильності з урахуванням структурних зламів	Враховує структурні зміни у волатильності	Складніший у використанні, ніж ARCH, GARCH та EGARCH

Ця методика дозволяє моделювати та аналізувати гетероскедастичні процеси в часових рядах, де дисперсія може змінюватися від періоду до періоду.

Розглянемо методику моделювання гетероскедастичних процесів ARCH. У всіх вказаних нижче експериментах, основні та альтернативні гіпотези висуваються в наступному вигляді:

$$H_0: \sigma_i^2 = \sigma^2 \text{ для } \forall i \text{ (гомоскедастичність)}$$

$$H_1: \exists i, j : \sigma_i^2 \neq \sigma^2 \text{ (гетероскедастичність)}$$

Тест Уайта включає в себе такі етапи:

– Здійснюємо оцінку коефіцієнтів основної регресії

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

— Записуємо залишки регресії

$$\hat{\varepsilon}_i, i = 1, \dots, n.$$

— Оцінюємо регресію квадратів залишків на всі регресори, їх квадрати, попарні перемноження і константу :

$$\varepsilon^2 = a_1 \sum_{i=2}^k a_i X_i + \sum_{i=2}^k \beta_{i2} X_i^2 + \sum_{\substack{i,j=2 \\ i < j}}^k \gamma_{ij} X_i X_j + u$$

В останній оціненій регресії знаходимо коефіцієнт множинної детермінації R^2 . Обчислюємо тестову статистику за формулою nR^2 . При виконанні нульової гіпотези тестова статистика має розподіл «хі - квадрат» з $m-1$ ступенями свободи, де m - число оцінюваних в останній регресії коефіцієнтів. Порівнюємо отримане значення тестової статистики з критичним.

$$\chi_a^2(m-1)$$

Якщо значення тестової статистики перевищує критичне, то нульова гіпотеза про гомоскедастичність відкидається. Привабливою рисою тесту Уайта є його універсальність. Однак цей тест не є конструктивним. Якщо гетероскедастичності виявлена, то тест Уайта не дає вказівки на функціональну форму гетероскедастичності. Єдиним способом корекції є застосування стандартних помилок у формі Уайта. [16] Тест Голдфельда - Квандта складається з наступних кроків:

- Оцінюємо коефіцієнти основної регресії.

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

- Записуємо залишки регресії

$$\hat{\varepsilon}_i, i = 1, \dots, n.$$

Після аналізу графіка залишків може з'явитися припущення, що дисперсія збурень збільшується з зростанням деякої змінної.

- Упорядковуємо все спостереження за модулем цієї змінної
- Ділимо всі спостереження на три групи (якщо спостережень досить багато, то приблизно на третині). Зручно, якщо в першій і третій групах кількість спостережень однаково.
- Спостереженнями середньої групи нехтуємо, а по перших n_1 і останнім n_2 спостереженнями оцінюємо окремі регресії.
- Використовуючи суми квадратів залишків (RSS) в оцінених регресіях, розраховуємо тестову статистику за формулою

$$F = \frac{\frac{RSS_2}{n_2 - k}}{\frac{RSS_1}{n_1 - k}}$$

- При виконанні нульової гіпотези тестова статистика має F розподіл з $(n^2 - k, n^1 - k)$ ступенями свободи.
- Порівнюємо отримане значення тестової статистики з критичним

$$F_\alpha(n_2 - k, n_1 - k)$$

Якщо значення тестової статистики перевищує критичне, то нульова гіпотеза про гомоскедастичність відкидається.

Моделі ARCH були представлені Енглom (1982). Модель передбачає, що дисперсія поточного терміну помилки пов'язана з розміром термінів помилок

попереднього періоду. [12] В контексті цієї моделі припускають, що рентабельність активу дана

$$r_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t,$$

де ε_t - послідовність $N(0,1)$ н.о.р. випадкові величини. Залишковий член у момент часу t , $r_t - \mu$, можна визначити як

$$\text{У моделі ARCH, } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2,$$

де $\alpha_0 > 0$ та $\alpha_1 \geq 0$ для забезпечення позитивної дисперсії та $\alpha_1 < 1$ для забезпечення нерухомості моделі.

Повернення залежать від усієї інформації до часу $t-1$ і є некорельованими, але не незалежними випадковими величинами. Коефіцієнт ексцесу визначається як

$$Kurt(a_t) = \frac{E[a_t^4]}{(E[a_t^2])^2}$$

При нормальному розподілі коефіцієнт ексцесу дорівнював би 3. Однак,

$$Kurt(a_t) = \frac{E[\sigma_t^4]E[\varepsilon_t^4]}{(E[\sigma_t^2])^2(E[\varepsilon_t^2])^2} = \frac{3E[\sigma_t^4]}{(E[\sigma_t^2])^2},$$

що означає, що $Kurt(a_t) > 3$.

Безумовна дисперсія a_t є

$$\begin{aligned} Var(a_t) &= E[a_t^2] - (E[a_t])^2 \\ &= E[a_t^2] \\ &= E[\sigma_t^2 \varepsilon_t^2] \\ &= E[\sigma_t^2] \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 E[a_{t-1}^2], \end{aligned}$$

і оскільки a_t - це стаціонарний процес, $Var(a_t) = Var(a_{t-1}) = E[a_{t-1}^2]$,

отже:

$$Var(a_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Моделювання ARCH/GARCH є потужним інструментом для моделювання гетероскедастичних процесів. Ця методика може

використовуватися для прогнозування волатильності, оцінки ризику та інших задач.

2.2 Аналіз фондового індексу NASDAQ-100

Наше дослідження зосереджене на американському ринку, зокрема на фондовому індексі NASDAQ-100. Дані були отримані з ресурсу Investing. Для забезпечення надійності результатів дослідження використовується великий часовий проміжок, що дозволяє провести довготривале прогнозування. Аналіз охоплює період 30 років з 01.01.1993 року по 18.11.2023 року, що складає загалом 7788 спостережень. Початковий набір даних, наведений у таблиці 3.1, включає значення індексу NASDAQ-100. Середнє значення вибірки становить 1549,5, медіана - 1408,5, мінімум - 128,4, а максимум - 4910,0. Умовну волатильність оцінювали за допомогою трьох різних вікон оцінки: 500 днів, 1000 днів і 2000 днів, щоб зменшити ризик структурних змін та врахувати непостійні параметри [див.додаток В].

У таблиці 2.2 подані описові статистики для розрахованого доходу індексу.

К-сть даних	7788
Мінімум	-0,15
Максимум	0,18
Середнє	0,006
Ст. відхилення	0,0169
Коеф. асиметрії	0,1447
Екссес	7,8716

Коливання цін рухаються повільно в умовах спокою, але набувають швидкості в умовах невизначеності, збільшеної торгівлі та нової інформації на ринку. Графік 2.1 ілюструє ці коливання цін від 1993 до 2023 року.

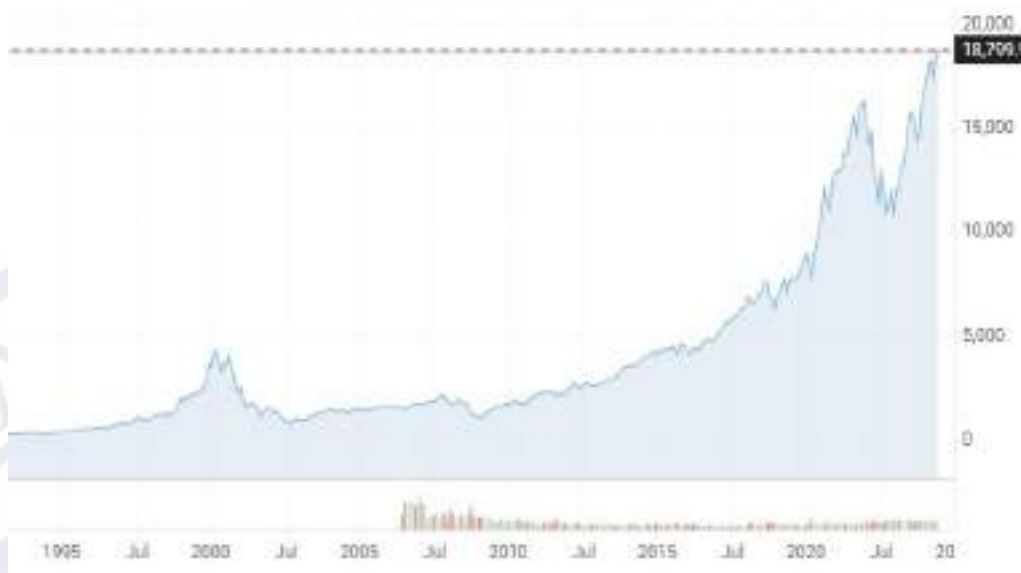


Рисунок 2.1 – Динаміка фондового індексу NASDAQ

На графіку видно, що протягом 5 років було невелике зростання, але з часом воно зійшло до значень 1995 року. На жаль через кризу 2008 року ціна стала нижче за показник 1995 року. Після 2010 року ціни знову різко зросли до середини 2016 року.

Графік 2.2 відображає умовну волатильність, оцінену за моделлю GARCH (1,1) з передбачуваним нормальним розподілом. Видно, що періоди кризових ситуацій призводять до збільшення умовної волатильності, тоді як відносно нормальні періоди супроводжуються зниженням умовної волатильності.



Рис 2.2 – Умовна волатильність

Аналіз ринкових цін викликає більше труднощів, ніж аналіз змін цін. Для інвесторів найкращим показником є віддача, яка є найефективнішим методом вимірювання змін цін. Великі повернення будь-якого тікера супроводжуються значними змінами, а великі зміни повернень будь-якого тікера, навпаки. На рисунку 2.3 можна спостерігати підтвердження цього висновку.



Рисунок 2.3 – Щоденна дохідність

Як згадувалося в попередніх розділах, в звітах маємо три характеристичні факти. Повернення не відповідають нормальному розподілу, майже відсутня кореляція між поверненнями на різні дні, і існує позитивна залежність між абсолютними прибутками від сусідніх днів.

На рис. 2.4а представлений квантильно-квантильний графік, що графічно порівнює два розподіли ймовірностей, будуючи їх квантилі один проти одного, для повернень NASDAQ-100. З цього можна зробити висновок, що прибутки не відповідають нормальному розподілу, але, скоріше, мають важкі хвости.

Подальший аналіз рис. 2.4 дозволяє стверджувати, що прибутки мають розподіл, який більше нагадує розподіл t-Стюдента. Для підтвердження відхилення від нормального розподілу було проведено додаткові тести. Тест Жака-Бера перевіряє, чи коефіцієнт перекосу дорівнює нулю, а коефіцієнт ердозу - три (що відповідає нормальному значенню розподілу для цих моментів). Значення p-value дорівнює $2.2e - 16$, що свідчить про відхилення від нульової гіпотези нормальності.

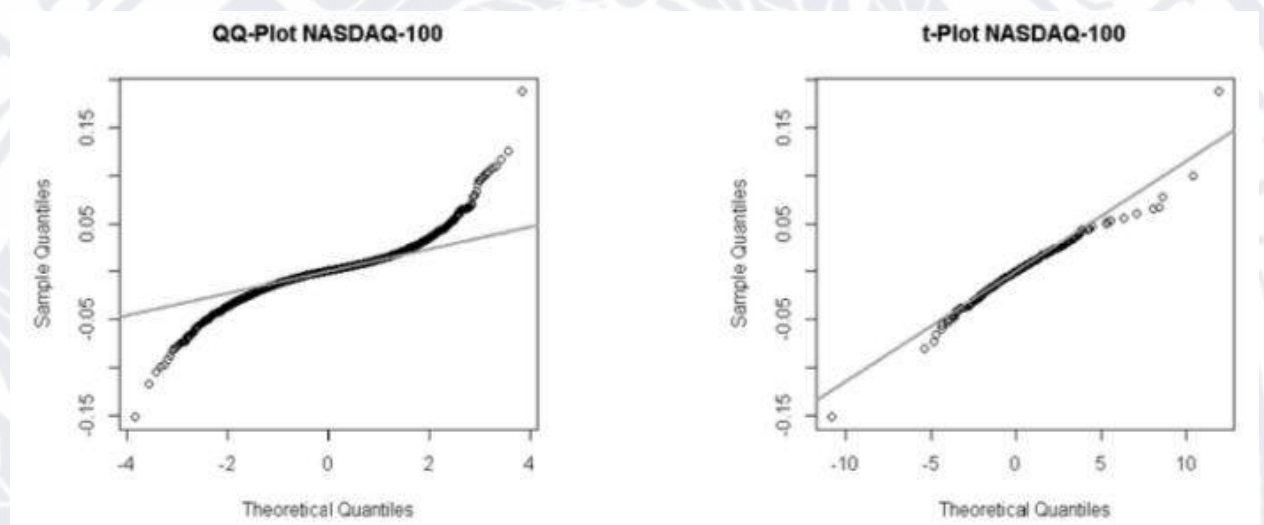


Рисунок 2.4 – Зліва н.р. та t-Стюдент

Очікується, що прибутки будуть перекошені вліво і матимуть високий пік. На рис. 2.5 представлена гістограма повернень NASDAQ-100, позначена червоною лінією, тоді як синя лінія відображає нормальний розподіл. Видно, що прибутки мають високий пік, але у цьому випадку перекос є позитивним, і, отже, вони трохи перекошені вправо. Крім того, зауважимо, що повернення мають високий куртоз. Це означає, що розподіл прибутковості має виражений пік в позитивному напрямку, і ймовірність досягнення цих позитивних значень вища, ніж ймовірність, передбачена нормальним розподілом.

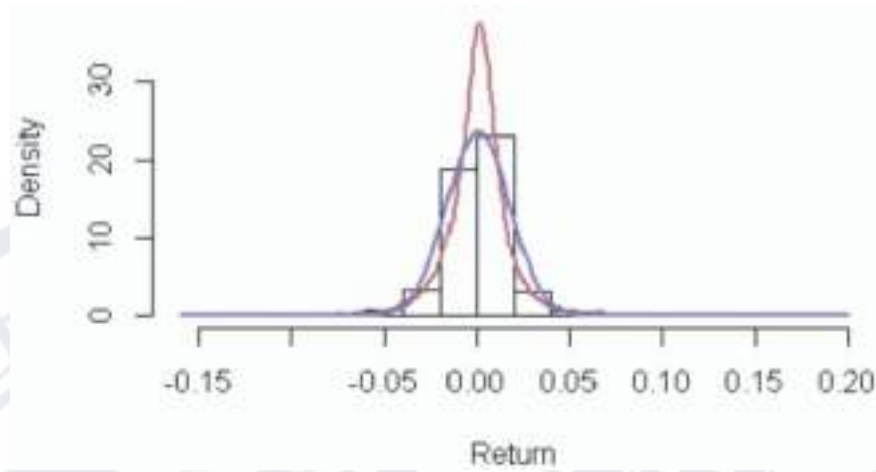


Рисунок 2.5 – Гістограма NASDAQ 100

Також створимо річні тенденції за допомогою Box Plot на рис. 2.6-2.8.



Рисунок 2.6 – Ціна



Рисунок 2.7 – Дохідність

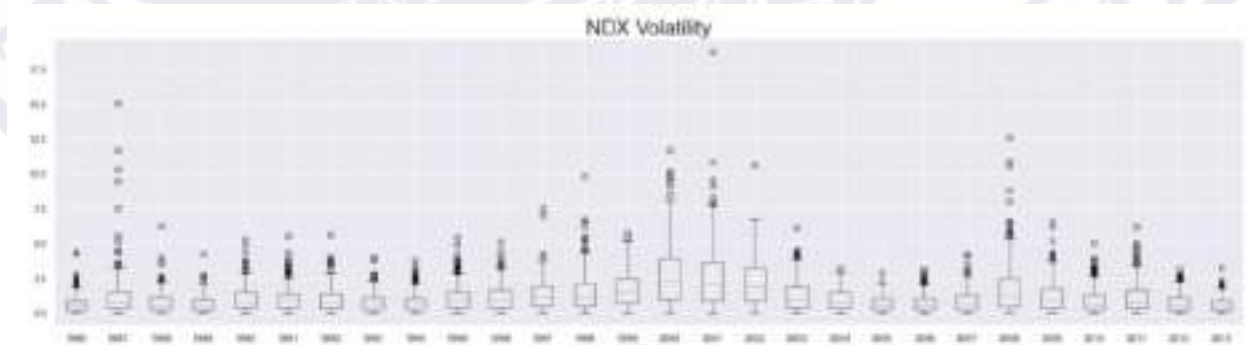


Рисунок 2.8 – Волатильність

Вищезазначені графіки демонструють, що ціни на NDX, як правило, мають тенденцію до зростання, за винятком кількох спадів, спостережених на початку 2000-х та поблизу 2008 року. Рентабельність здається досить стабільною протягом багатьох років, але з деякими значними коливаннями протягом згаданих періодів.

Наявність більш широкої прямокутної діаграми показує, що значення, спостерігається в тому році, сильно різнилися. Точно так само наявність великої кількості вибросів також показує, що в цьому році дані мають значущі коливання. З цього випливає, що є роки з більш високим ступенем коливань/нестабільності на ринку (наприклад, 2004 та 2008 роки).

Згладжування - це метод, який використовується для зменшення безладних коливань або сплесків в часі ряду. Це робиться для того, щоб послабити вплив шуму на серію. Один із поширених методів згладжування часових рядів - використання ковзних середніх. У цьому методі середнє значення для заданої кількості періодів (вікно) обчислюється для кожного тимчасового кроку в ряду.

Для тимчасового кроку вікно розміру n може бути визначено двома способами:

- Поточний часовий крок може бути в кінці вікна, тобто $n-1$ колишніх відставань і 1 поточний часовий крок складають вікно розміру n .
- Поточний часовий крок може бути в центрі вікна, тобто приблизно половина лагів $n-1$ - це минулі затримки, інші - майбутні, а поточний часовий крок знаходиться в центрі.

Наведені нижче графіки показують основну тенденцію даних, використовуючи ковзне середнє значення даних. Зі збільшенням розміру вікна криві стають набагато більш плавними, і тенденція краще виявляється.

Використовуючи цю техніку, стає очевидним, що в ті часові інтервали ринок загалом давав сильну віддачу, коли ринок був відносно стабільним, і яка загальна тенденція на ринку в різні часові інтервали.

На рисунках 2.9 - 2.11 представлені результати згладжування для вивчених даних.



Рисунок 2.9 - МА ціна

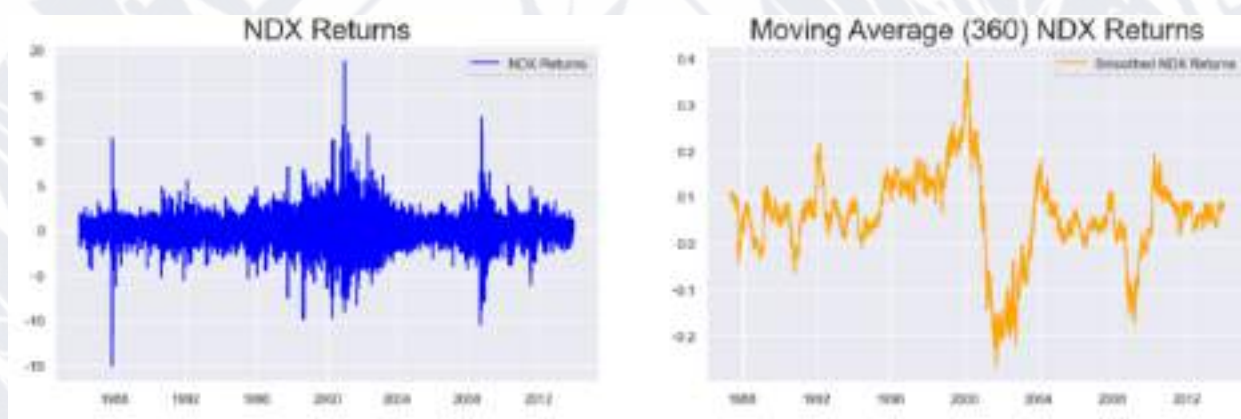


Рисунок 2.10 - МА дохідність

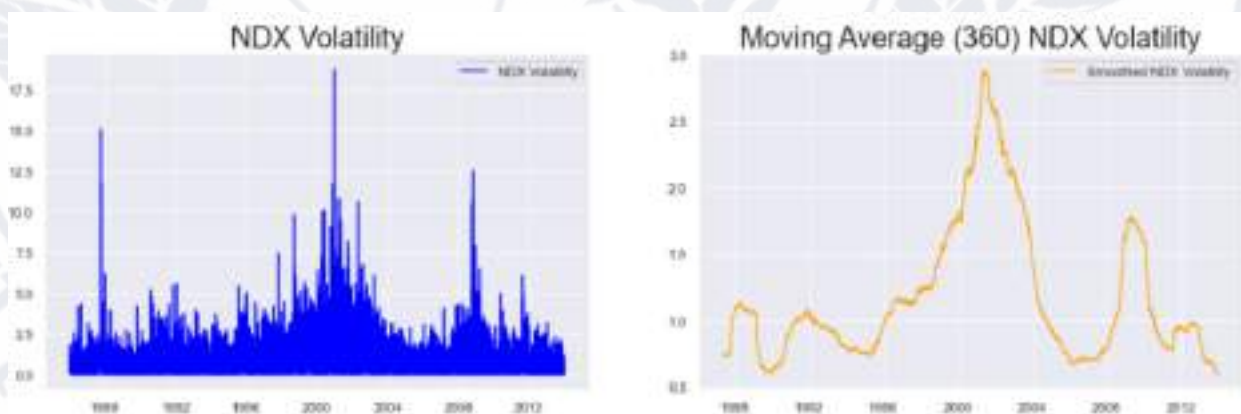


Рисунок 2.11 - МА волатильність

Проаналізувавши результати, можна чітко спостерігати тенденції. Як ціни, так і прибутковість демонструють різкі падіння в 2004 і 2008 роках. Волатильність зростає протягом цих двох періодів. Все це свідчить про наявність нестабільного ринку в зазначені періоди часу.

Ціна Nasdaq 100 має явну висхідну тенденцію, за винятком двох падінь. Прибутковість і волатильність в певному розумінні постійні, за винятком 2004 і 2008 років.

Також важливо відзначити, що практично не існує взаємозв'язку між прибутками за різні дні. На рис. 2.7 представлена функція автокореляції повернень NASDAQ-100. Загалом прибутковість не демонструє сильної взаємозалежності, хоча можна виокремити деякі відставання, де коефіцієнт кореляції є статистично значущим. Це ставить питання про наявність послідовної кореляції у поверненнях.

Для відповіді на це питання був проведений тест Бокса-Пірса (Box and Pierce, 1970) для перших 40 відставань з нульовою гіпотезою незалежності повернень. Хі-квадрат становив 170,37, а р-значення тесту дорівнювало $2,2e - 16$. Це свідчить про відкидання нульової гіпотези і, отже, виявлення серійної кореляції в поверненнях.

На рис. 2.12b представлена функція часткової автокореляції повернень. Видно, що багато відставань виходять за межі діапазону значущості.

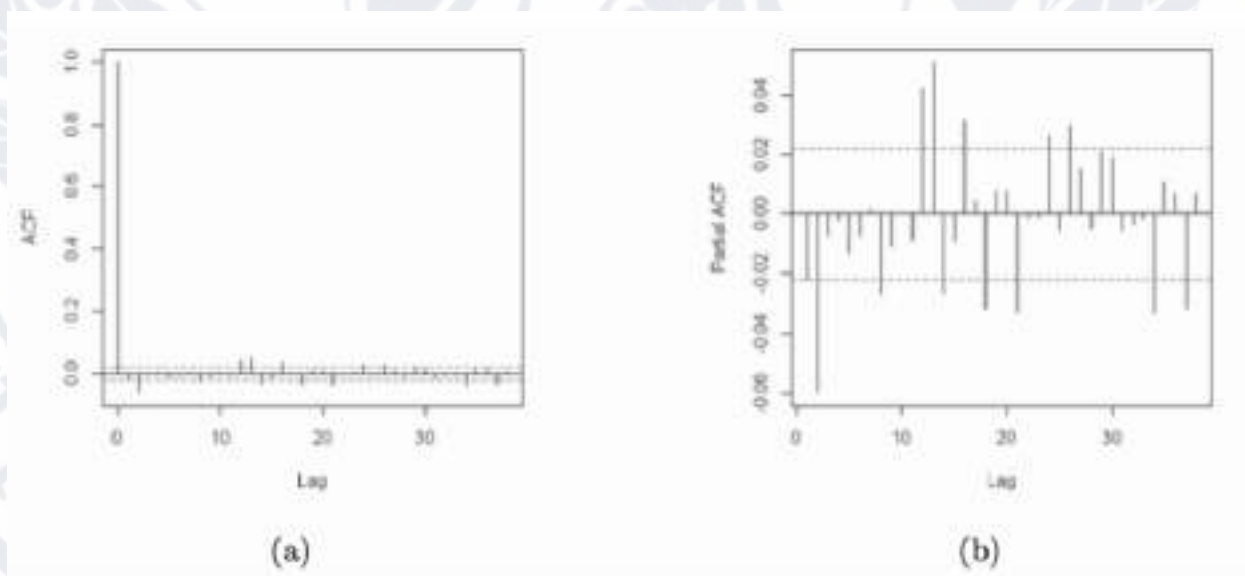


Рисунок 2.12 – ACF та PACF прибутки

На рис. 2.13 подано показники автокореляції (ACF) та часткової автокореляції (PACF) абсолютних прибутків. PACF демонструє значну

автокореляцію до відставання 35. Аналіз ACF показує позитивну залежність між абсолютними прибутками на сусідні дні, що відповідає третьому стилізованому факту повернення.

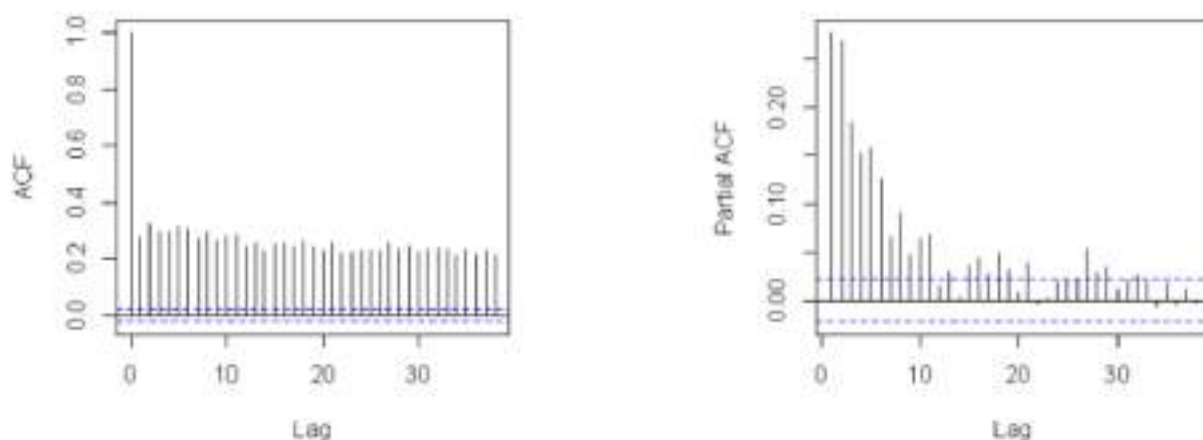


Рисунок 2.13 – ACF та PACF волатильність

Дослідження розподілу часових рядів на щоденній основі виявило наявність характеристик товстих хвостів, що може свідчити про можливу наявність умовної гетероскедастичності в поверненнях. З метою перевірки ефекту ARCH (авторегресивної умовної гетероскедастичності), був використаний тест множника Лагранжа, запропонований Енглом. За нульову гіпотезу було встановлено відсутність ефектів ARCH в досліджуваному ряді. Результати тесту показали значення хі-квадрат, рівне 1344,2, а р-значення склало $2,2 \times 10^{-16}$. Ці дані є досить вагомими, оскільки вони свідчать про відхилення від нульової гіпотези і вказують на наявність умовної гетероскедастичності в поверненнях. Нажаль, у даному дослідженні неможливо було провести тест на ефект GARCH, що може бути предметом подальших досліджень.

Висновки до розділу 2

Застосування моделей, які не враховують кластери гетероскедастичності та волатильності, не є оптимальним вибором. Серед найпоширеніших моделей, використовуваних у таких дослідженнях, є моделі ARCH та GARCH, оскільки вони враховують розподіл гетероскедастичності та дозволяють моделювати зміни волатильності з часом.

Між моделями ARCH та GARCH існують певні відмінності: моделі ARCH та стохастична волатильність ефективно прогнозують волатильність. Однак, моделі GARCH виявляються більш ефективними, оскільки рідше порушують обмеження негативу. Моделі GARCH також відзначаються більшою економією ресурсів, надаючи кращий прогноз з меншою кількістю змінних та уникючи переобладнання. З цих причин вирішено використовувати моделі з родини GARCH для прогнозування волатильності.

РОЗДІЛ 3 ОБГРУНТУВАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МОДЕЛЕЙ ПРОГНОЗУВАННЯ

3.1 Порівняння моделей прогнозування на вибірці

Кореляція описує ступінь зв'язку між змінними і використовується для вивчення ступеня залежності між ними.

У таблиці 3.1 представлені кореляційні зв'язки між різними оцінками різних моделей, що використовуються у цьому дослідженні. Діапазон коефіцієнта кореляції становить від -1 до 1. Всі оцінки моделей сімейства GARCH сильно та позитивно корелюють для трьох вікон оцінки (500, 1000 та 2000 днів).

В таблиці 3.1 наведені результати одновимірної лінійної регресії для моделі GARCH (1,1) з двома різними розподілами, а саме нормальним розподілом та розподілом t-Стюдента.

Таблиця 3.1 – Оцінка GARCH на 500, 1000, 2000 днів

Модель / Дистанці	R^2 (500)	R^2 (1 000)	R^2 (2 000)
GARCH (1.1) -norm	0,33	0, 298	0, 512
GARCH (1.1) - std	0,311	0,286	0, 502

Основною метою дослідження є виявлення моделі з найкращими можливостями прогнозування. Можна припустити, що їх оцінки можуть відрізнятися, тому є підстави перевірити, чи одна модель працює краще за інші.

Лінійні моделі оцінювалися за допомогою одновимірної регресії, де залежною змінною була реалізована волатильність, а незалежною змінною - оцінки моделі сімейства GARCH за три різні періоди.

На рис. 3.1 представлені результати одновимірної лінійної регресії для моделі GARCH (1,1) з обома специфікаціями розподілу (нормальний розподіл та розподіл t-Стюдента).

Panel A														
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
(1)	1	0.996	0.972	0.970	0.981	0.983	0.999	0.994	0.967	0.970	0.963	0.962	0.970	0.969
(2)		1	0.964	0.966	0.968	0.974	0.998	0.999	0.954	0.959	0.952	0.955	0.959	0.962
(3)			1	0.999	0.984	0.986	0.969	0.962	0.989	0.992	0.908	0.908	0.908	0.999
(4)				1	0.979	0.983	0.968	0.964	0.986	0.990	0.993	0.998	0.995	0.998
(5)					1	0.999	0.976	0.964	0.987	0.987	0.980	0.976	0.989	0.985
(6)						1	0.979	0.971	0.987	0.988	0.981	0.978	0.989	0.987
(7)							1	0.997	0.961	0.964	0.959	0.959	0.966	0.966
(8)								1	0.950	0.955	0.949	0.952	0.955	0.959
(9)									1	0.997	0.989	0.987	0.993	0.991
(10)										1	0.992	0.991	0.995	0.994
(11)											1	0.999	0.998	0.998
(12)												1	0.996	0.999
(13)													1	0.999
(14)														1
Panel B														
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
(1)	1	0.997	0.969	0.967	0.977	0.978	0.999	0.996	0.963	0.963	0.960	0.960	0.967	0.967
(2)		1	0.963	0.964	0.969	0.972	0.998	0.999	0.954	0.956	0.950	0.954	0.958	0.961
(3)			1	0.999	0.983	0.984	0.967	0.962	0.983	0.988	0.998	0.998	0.997	0.998
(4)				1	0.980	0.983	0.966	0.963	0.983	0.988	0.995	0.998	0.995	0.998
(5)					1	0.999	0.973	0.966	0.981	0.985	0.979	0.977	0.989	0.987
(6)						1	0.974	0.969	0.981	0.985	0.979	0.979	0.988	0.989
(7)							1	0.999	0.958	0.959	0.956	0.957	0.964	0.964
(8)								1	0.951	0.953	0.948	0.952	0.956	0.959
(9)									1	0.994	0.984	0.984	0.987	0.988
(10)										1	0.988	0.990	0.992	0.993
(11)											1	0.999	0.998	0.997
(12)												1	0.997	0.998
(13)													1	0.999
(14)														1
Panel C														
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
(1)	1	0.999	0.981	0.981	0.984	0.986	0.999	0.996	0.976	0.980	0.978	0.978	0.982	0.983
(2)		1	0.975	0.979	0.977	0.982	0.998	0.999	0.970	0.975	0.973	0.977	0.977	0.981
(3)			1	0.998	0.991	0.992	0.980	0.974	0.988	0.993	0.999	0.997	0.998	0.997
(4)				1	0.988	0.991	0.981	0.979	0.987	0.993	0.998	0.999	0.997	0.999
(5)					1	0.999	0.982	0.976	0.989	0.992	0.989	0.985	0.996	0.992
(6)						1	0.985	0.981	0.988	0.993	0.990	0.989	0.995	0.995
(7)							1	0.998	0.975	0.978	0.977	0.978	0.981	0.982
(8)								1	0.968	0.974	0.972	0.977	0.975	0.980
(9)									1	0.994	0.989	0.987	0.992	0.990
(10)										1	0.994	0.993	0.996	0.996
(11)											1	0.998	0.998	0.998
(12)												1	0.996	0.999
(13)													1	0.998
(14)														1

Рис 3.1 – Кореляційні зв'язки

З метою розробки та ідентифікації найефективнішої моделі для точного прогнозування було використано метод Мінцера-Зарновіца, який є широко визнаним показником якості прогнозів.

Для досягнення цієї мети, проводиться оцінка лінійних моделей за допомогою одновимірної регресії. Залежна змінна представлена реалізованою

волатильністю, тоді як незалежна змінна - це оцінки моделі з сімейства GARCH, з використанням трьох різних періодів.

Зважаючи на відомі обмеження, відзначається, що при збільшенні вікна оцінки моделі GARCH з 500 днів до 1000 днів, коефіцієнт детермінації R^2 регресійного аналізу зазнає незначного зменшення приблизно на 3%. Зауважується, що при використанні 2000-денного вікна оцінки для моделі GARCH спостерігається значне збільшення R^2 лінійної регресійної моделі до понад 50%. Варто відмітити, що всі оцінені коефіцієнти "Sigma" є позитивними та статистично значущими на рівні 1%, і жоден з перехоплень не є статистично значущим на рівні значимості 5%. Ці результати свідчать про те, що реалізована волатильність може бути представлена як x -кратність сигми, де x є значенням умовної волатильності моделі. Тому можна зробити припущення про стабільність та надійність моделі GARCH у прогнозуванні умовної волатильності.

У табл. 3.2 викладені результати лінійної регресії для інших моделей сімейства GARCH, які були застосовані у даному дослідженні і оцінені з використанням трьох різних оціночних вікон: 500, 1000 та 2000 днів.

При ретельному аналізі кожної таблиці можна помітити, що значення коефіцієнта детермінації R^2 для всіх моделей сімейства GARCH майже однакові, за винятком моделі IGARCH, яка в усіх випадках має нижче значення R^2 . При збільшенні вікна оцінки для прогнозування умовної волатильності з моделями GARCH з 500 до 1000 днів, значення R^2 лінійних регресій трохи зменшуються. Однак, коли вікно оцінки збільшується до 2000 днів, значення R^2 зростають, відображаючи аналогічну тенденцію, яку ми спостерігали в табл. 3.1. Ці результати свідчать про стабільність та надійність моделей GARCH в контексті прогнозування умовної волатильності.

Загалом, результати лінійної регресії показують, що використання більш складних оцінок моделі GARCH для умовної волатильності призводить до вищих значень коефіцієнта детермінації R^2 порівняно з використанням оцінок GARCH (1,1).

Таблиця 3.2 – Результати лінійної регресії сімейства GARCH

Модель / Дистанці	R ² (500)	R ² (1 000)	R ² (2 000)
EGARCH (1.1) –norm	0,403	0,372	0,539
EGARCH(1.1) - std	0,399	0,374	0,533
GJR(1.1) -norm	0,40	0,375	0,555
0,GJR(1.1) - std	0,396	0,373	0,550
IGARCH(1.1) -norm	0,317	0,287	0,507
IGARCH(1.1) - std	0,304	0,275	0, 499
NGARCH(1.1) -norm	0, 44	0,392	0,554
NGARCH(1.1) - std	0, 435	0, 409	0,552
TGARCH(1.1) -norm	0, 415	0,387	0,536
TGARCH(1.1) - std	0, 411	0,387	0,53
APARCH(1.1) –norm	0, 416	0,390	0, 547
APARCH (1.1) - std	0, 411	0,39	0,541

Всі оцінені коефіцієнти "Sigma" є позитивними та статистично значущими для всіх регресій. За періоду оцінки 500 та 1000 днів для умовної волатильності з моделями GARCH виявлено кілька лінійних регресій зі статистично значущим перехопленням, але при збільшенні вікна оцінки до 2000 днів жодне з перехоплень лінійної регресії не є статистично значущим. Ці результати свідчать про те, що значна частина варіації реалізованої волатильності не може бути пояснена умовною летючістю, оціненою за допомогою моделі GARCH, оскільки коефіцієнти детермінації не наближаються до 1. Виявлені недоліки, такі як неефективність регресії та некоректні стандартні помилки через гетероскедастичність моделі регресії та відсутність штрафу за упереджені прогнози, спричинили ці результати, які відповідають очікуванням, які були висловлені в літературному огляді.

Враховуючи наведені недоліки, варто зазначити, що використання коефіцієнта детермінації як показника точності прогнозування не є дуже інформативним (Мерфі та Епштейн, 1989). Навіть при порівнянні R^2 регресій, де моделі сімейства GARCH використовуються як незалежна змінна, не можна однозначно вирішити, чи краще використовувати оцінку за 1000-денний період або за 2000-денний період порівняно з умовною волатильністю, оціненою за допомогою 500-денного вікна оцінки. Існує ймовірність, що серія може мати відхилення, які значно впливають на оцінки умовної волатильності моделей GARCH, в залежності від обраного періоду оцінки. Коефіцієнт визначення лінійних регресій є врівноваженим для кожного вікна оцінки, що використовується при оцінці моделей GARCH. Це дає підставу стверджувати, що моделі GARCH показують схожі результати щодо прогнозуваної сили умовної волатильності.

3.2 Автоматизація прогнозування волатильності

Дані технологічного індексу проаналізовано за допомогою популярних статистичних моделей: GARCH (узагальнена авторегресивна умовна гетероскедастичність) та EGARCH.

Інформація для аналізу технічного індексу Америки Nasdaq 100 була завантажена за допомогою API `yfinance` у Python. Після очищення використовувалися дані для отримання дохідності Nasdaq 100 (процентна зміна послідовних цін) та волатильності (величина відхилення).

Модель GARCH побудована для моделювання волатильності в дохідності Nasdaq 100.

Далі дані були розділені на тренувальні та тестові набори. Всі спостереження на дату 2014-01-01 складають випробувальний набір, а всі спостереження до цієї дати утворюють тренувальний набір даних.

GARCH розшифровується як узагальнена авторегресивна умовна гетероскедастичність. Умовна гетероскедастичність еквівалентна умовній

дисперсії (або умовній нестабільності) у часових рядах. Модель GARCH використовує концепцію кластеризації волатильності для моделювання волатильності серії. Кластеризація волатильності означає, що волатильність сьогодні залежить від волатильності на попередніх етапах часу. Модель GARCH визначається використанням 2 параметрів: GARCH (p, q). GARCH моделює нестабільність, а квадрат волатильності на певному етапі часу представлений як лінійна комбінація константи, групи минулих залишкових доданків та групи минулих термінів волатильності. Параметри p та q використовуються для контролю кількості цих відсталих залишкових та волатильності.

Модель GARCH була підібрана із використанням заходів валідації прогнозу. Щоб перевірити, чи відповідає передбачена волатильність фактичній волатильності у майбутньому, обчислювалася величина прибутковості Nasdaq 100 і зберігалася в серії `spx_vol`. Таким чином, модель підходить для `spx_ret` ряду, і прогнозована волатильність порівнюється з `spx_vol`.

Графік PACF (функція часткової автокореляції) використовується для отримання початкової оцінки параметрів: p і q моделі GARCH. Кількість значних лагів на цьому графіку використовується як вихідні параметри. Потім зведена таблиця моделі використовується для з'ясування, які коефіцієнти в моделі є значущими, і на цій основі модель налаштовується.

Тепер побудований графік PACF для Nasdaq 100 дохідності рис. 3.2

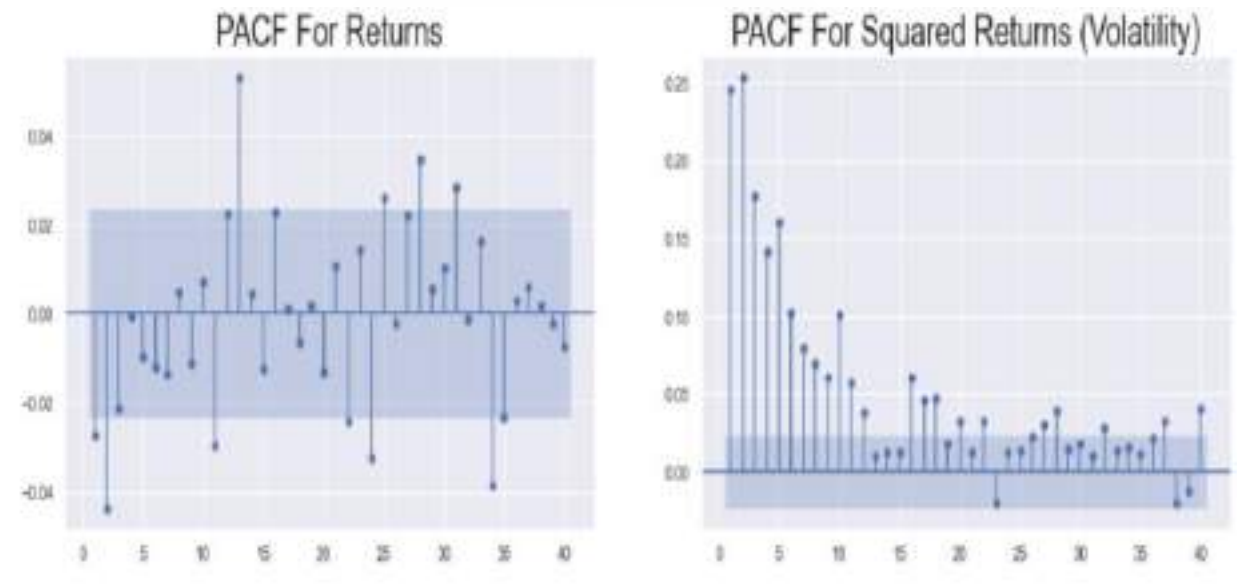


Рис 3.2 – PACF для Nasdaq 100 дохідності

Використовуючи функцію `plot_pacf()` з пакету `statsmodels.graphics.tsaplots`, створено графік PACF для серії `spx_ret`. Під час аналізу сюжету було виявлено, що перші два лаги є значущими. Таким чином, для початкової точки відліку підходить модель GARCH (2, 2).

Результати застосування моделі GARCH представлені на рисунках 3.3 та 3.4.

```
Iteration:      5,   Func. Count:      52,   Neg. LLF: 14891.306556882839
Iteration:     10,   Func. Count:      97,   Neg. LLF: 12556.26635676489
Iteration:     15,   Func. Count:     142,   Neg. LLF: 12536.637004712778
Optimization terminated successfully (Exit mode 0)
Current function value: 12536.635513847079
Iterations: 19
Function evaluations: 173
Gradient evaluations: 19
```

Рис 3.3 – Результати 1 GARCH

Constant Mean - GARCH Model Results

Dep. Variable:	ndx_ret	R-squared:	0.000
Mean Model:	Constant Mean	Adj. R-squared:	0.000
Vol Model:	GARCH	Log-Likelihood:	-12536.6
Distribution:	Standardized Student's t	AIC:	25087.3
Method:	Maximum Likelihood	BIC:	25135.5
		No. Observations:	7303
Date:	Thu, Jun 03 2021	Df Residuals:	7302
Time:	23:51:33	Df Model:	1

Mean Model

	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
mu	0.1034	1.315e-02	7.864	3.708e-15	[7.765e-02, 0.129]

Volatility Model

	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
omega	0.0249	7.254e-03	3.428	6.072e-04	[1.065e-02, 3.909e-02]
alpha[1]	0.0382	1.221e-02	3.129	1.752e-03	[1.428e-02, 6.214e-02]
alpha[2]	0.0798	1.628e-02	4.904	9.402e-07	[4.793e-02, 0.112]
beta[1]	0.3162	0.142	2.234	2.549e-02	[3.877e-02, 0.594]
beta[2]	0.5592	0.136	4.116	3.849e-05	[0.293, 0.825]

Distribution

	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
nu	7.2577	0.655	11.089	1.422e-28	[5.975, 8.541]

Covariance estimator: robust

Рис 3.4 – Результати 2 для GARCH

Побудуємо графік передбаченої волатильності та порівняємо його з передбаченою на Рисунку 3.5.



Рис 3.5 – Прогнозована та передбачена волатильність GARCH

За допомогою наведеного зображення можна зробити наступні висновки: кожен раз, коли передбачена волатильність моделі різко зростає, величина доходності (волатильність, розрахована за допомогою евристичного методу), також значно змінюється. Навпаки, у випадку стабільної передбаченої волатильності, величина доходності залишається відносно стійкою. Ці спостереження дозволяють нашій моделі чітко визначати періоди високої і низької волатильності в доходності Nasdaq 100.

Основною метою нашої моделі є ідентифікація стабільних та нестабільних періодів на ринку. Збирання цієї інформації є ключовим для аналізу та прогнозування поведінки фінансового ринку. Завдяки нашій моделі ми можемо приймати обґрунтовані та інформовані рішення щодо управління ризиками та отриманням прибутку. Додатково, у Таблиці 3.3 представлені похибки прогнозування GARCH, що дозволяє нам оцінити точність нашої моделі.

Таблиця 3.3 - Похибки прогнозу GARCH

Похибка	Величина
RMAE	0.95065
MAE	0.7091

Виконаємо прогнозування за допомогою метода EGARCH, результати на рисунках 3.6, 3.7

```
Iteration:      5,   Func. Count:      58,   Neg. LLF: 12581.729732096977
Iteration:     10,   Func. Count:     106,   Neg. LLF: 12547.087832431946
Optimization terminated successfully   (Exit mode 0)
      Current function value: 12547.087567693197
      Iterations: 13
      Function evaluations: 129
      Gradient evaluations: 13
```

Рис 3.6 – Результати 1 EGARCH

Constant Mean - EGARCH Model Results

Dep. Variable:	ndx_ret	R-squared:	0.000
Mean Model:	Constant Mean	Adj. R-squared:	0.000
Vol Model:	EGARCH	Log-Likelihood:	-12547.1
Distribution:	Standardized Student's t	AIC:	25108.2
Method:	Maximum Likelihood	BIC:	25156.4
No. Observations:			7303
Date:	Fri, Jun 04 2021	Df Residuals:	7302
Time:	00:07:16	Df Model:	1

Mean Model

	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
mu	0.1077	1.314e-02	8.194	2.524e-16	[8.194e-02, 0.133]

Volatility Model

	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
omega	0.0164	3.831e-03	4.285	1.827e-05	[8.907e-03, 2.392e-02]
alpha[1]	0.0824	3.185e-02	2.587	9.689e-03	[1.996e-02, 0.145]
alpha[2]	0.1394	3.778e-02	3.690	2.246e-04	[6.534e-02, 0.213]
beta[1]	0.5113	0.151	3.386	7.095e-04	[0.215, 0.807]
beta[2]	0.4789	0.150	3.184	1.452e-03	[0.184, 0.774]

Distribution

	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
nu	6.9929	0.610	11.467	1.928e-30	[5.798, 8.188]

Covariance estimator: robust

Рисунок 3.7 – Результати 2 для EGARCH

Тепер давайте побудуємо графік передбаченої волатильності за допомогою методу EGARCH і порівняємо його з прогнозованою. Рисунок 3.8



Рисунок 3.8 – Прогнозована та передбачена волатильність EGARCH

У табл. 3.4 представлені відхилення прогнозу для моделі EGARCH:

Таблиця 3.4 – Похибки прогнозу EGARCH

Похибка	Величина
RMSE	0.95058
MAE	0.7084

На основі наданого зображення можна зробити наступні спостереження: кожного разу, коли прогнозована волатильність моделі різко зростає, величина прибутковості (волатильність, розрахована евристичним методом), також сильно коливається. За своєю чергою, коли прогнозована волатильність залишається стабільною, величина прибутковості також відносно стабільна. Ці спостереження свідчать про те, що наша модель ефективно визначає періоди високої та низької волатильності у доходності Nasdaq 100.

Основна мета цієї моделі полягає в тому, щоб визначити періоди, коли ринок є стабільним, і періоди, коли ринок є нестабільним. Модель успішно збирає цю інформацію, що є ключовим фактором для аналізу та прогнозу поведінки фінансового ринку.

Зазначені спостереження та аналіз дозволяють нам зробити висновок про те, що наша модель ризику має високу потенційну корисність для інвесторів та трейдерів на ринку Nasdaq 100. В подальшому ми зможемо її

використовувати на українському фондовому ринку. Це дає нам можливість приймати більш обґрунтовані та інформовані рішення щодо управління ризиками та отриманням прибутку на цьому ринку.

Висновки до розділу 3

Досліджено прогнозування здатності до нестабільності моделей сімейства GARCH. В аналізі було порівняно сім різних моделей GARCH з метою визначення, яка з них найкраще прогнозує волатильність на біржі NASDAQ-100.

Для порівняння моделей було використано тест SPA. Було виявлено, що ніяка із простих моделей GARCH, які оцінювалися як за нормальним, так і за розподілом t-Стюдента, не перевершувала жодну іншу модель протягом всіх трьох періодів оцінки.

Модель EGARCH, яка оцінювалася як за нормальним, так і за розподілом t-Стюдента, не є настільки ефективною, як будь-яка інша модель у прогнозуванні умовної волатильності з точки зору збитків. Однак, що стосується прогнозування волатильності на наступний день, можуть бути окремі винятки. Наприклад, модель IGARCH може показувати результати, які поступаються результатам конкуруючих моделей з точки зору погодження, тому не рекомендується використовувати її для прогнозування волатильності. Модель GJR також може надавати цікаві результати, які варто розглядати детальніше. Модель GJR, оцінювана за нормальним розподілом, демонструє переваги над конкуруючими моделями, коли використовується вікно оцінки розміром 1000 днів. Модель також переважає інші моделі у випадку наявності викидів у вибірці, але в даному випадку це не спостерігається. Однак, ці висновки не стосуються моделі GJR, яка оцінюється за розподілом t-Стюдента. Моделі GARCH з ненормальним розподілом є більш надійними для прогнозування волатильності.

Моделі NGARCH, TGARCH та APARCH не перевершують жодну з конкуруючих моделей. Було виявлено, що збільшення розміру вікна оцінки може призвести до різних результатів, але в разі моделі IGARCH немає різниці в оцінці вікна, оскільки ця модель завжди переважає конкуруючі моделі.

Неможливо створити ідеальну модель прогнозування, оскільки у випадку прогнозування волатильності намагаються передбачити майбутнє, і, отже, жодна модель не може досягти абсолютної 100% точності. Необхідно оцінювати переваги та недоліки різних моделей (у цьому випадку - прогнозування умовної волатильності) та враховувати вибір даних для досягнення найкращого можливого прогнозу волатильності.

Використання нових моделей GARCH або інших моделей може призвести до кращих результатів прогнозування. Реалізовані міри, такі як реалізовані варіації ядра та біпотужності, є більш інформативними про поточний рівень волатильності, ніж квадратичний приріст, що робить їх цікавими для використання в моделюванні та прогнозуванні майбутньої волатильності за допомогою рівняння GARCH.

ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота присвячена дослідженню методів прогнозування волатильності на фондових ринках на основі розробки різних моделей прогнозування та порівнянні їх за різними метриками з метою вибору найбільш точної моделі.

Розглянуто основні концепції, пов'язані з фондовим ринком, включаючи його структуру, функції та основних учасників. Також досліджено поняття часових рядів та їх використання в аналізі фінансових даних. Розглянуто різноманітні алгоритми прогнозування, включаючи авторегресійні моделі, машинне навчання та штучні нейронні мережі, які застосовуються для прогнозування фінансових процесів.

У процесі дослідження було проведено аналіз авторегресійних моделей, зокрема моделей сімейства GARCH для прогнозування фінансових процесів на фондовому ринку та акціях різних компаній.. За допомогою цих моделей були побудовані прогнози, а їх результати були оцінені за допомогою різних метрик, таких як середньоквадратична помилка (RMSE), середня абсолютна помилка (MAE) та коефіцієнт детермінації (R-квадрат). Ці метрики використовуються для вибору найкращої моделі прогнозування фінансових процесів. Отримані результати оцінки було проаналізовано та обрано оптимальну модель для подальшого дослідження.

Описано процес проектування програмного продукту, що призначений для аналізу та прогнозування процесів у вибраній сфері. Наведено результати обчислювальних експериментів, які відносяться до побудови математичних моделей обраних процесів та оцінювання короткострокових прогнозів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Анісімова Л. Особливості моделювання ринкових економічних процесів. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Економіка*. 2011. Вип. 121/122. С. 89–93.
2. Белз О. Г. Усунення нестационарності часових рядів під час статистичного моделювання соціально-економічних процесів. *Актуальні проблеми економіки*. 2013. № 11 (149). С. 163–171.
3. Бідюк П. І., Демківський Є. О., Демківська Т. І. Прогнозування нестационарних фінансово-економічних процесів. *Thesis*. 2020. URL: <https://er.knutd.edu.ua/handle/123456789/16442> (дата звернення: 08.02.2024).
4. Білич М. Ю. Прогнозування соціально-економічних явищ та процесів. *Thesis*. 2017. URL: <https://er.knutd.edu.ua/handle/123456789/10455> (дата звернення: 08.02.2024).
5. Бондар О. А. Специфіка моделювання економічних процесів. *Економіка та держава*. 2013. № 5. С. 67–69.
6. Волоснікова Н. М. Моделювання взаємодії неформалізованих інформаційних потоків інтегрованої логістизації процесів виробничо-економічних систем. *Thesis*. 2016. URL: <http://repository.kpi.kharkov.ua/handle-/KhPI-Press/22306> (дата звернення: 08.02.2024).
7. Гапєєва О. М., Дзюба Д. В., Галєєв О. С. Макроекономічне прогнозування соціально-економічних процесів в умовах трансформації економіки України. *Investytsiyi: praktyka ta dosvid*. 2023. № 19. С. 41–47. URL: <https://doi.org/10.32702/2306-6814.2023.19.41> (дата звернення: 08.02.2024).
8. Горкуненко А. Б., Горкуненко А. Б., Horkunenko A. B. Моделювання та методи аналізу і прогнозування циклічних економічних процесів в інформаційних системах підтримки прийняття рішень. *Thesis*. 2013. URL: <http://elartu.tntu.edu.ua/handle/123456789/2033> (дата звернення: 08.02.2024).

9. Денкевич М.-М. М., Denkevych M.-M. Удосконалення логістичних процесів та прогнозування економічних результатів (на прикладі ТОВ "СТАНКОР+"). *Master's thesis*. 2021. URL: <http://elartu.tntu.edu.ua/handle/lib/36497> (дата звернення: 08.02.2024).
10. Дініц Р. О. Моделювання економічних процесів з використанням теорії графів. *Thesis*. 2016. URL: <http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/-123456789/48995> (дата звернення: 08.02.2024).
11. Єсіна О. Г., Лінгур Л. М. Інжиніринг бізнес-архітектури підприємства для прогнозування соціально-економічних процесів. *Підприємництво та інновації*. 2020. № 11-2. С. 124–130. URL: <https://doi.org/10.37320/2415-3583/11.38> (дата звернення: 08.02.2024).
12. Н. В. Білецька та ін. Застосування фінансово-економічних методів для вибору пріоритетних напрямів аграрного сектору регіону як основа стратегічного планування та прогнозування. *Herald of Lviv University of Trade and Economics Economic sciences*. 2021. № 62. С. 22–31. URL: <https://doi.org/10.36477/2522-1205-2021-62-03> (дата звернення: 08.02.2024).
13. Іщук С. О. Циклічність економічних процесів: моделювання операційного циклу. *Регіональна економіка*. 2007. № 3. С. 211–218.
14. Кривда О. В., Сидоренко Ю. В., Романова Д. П. Прогнозування динаміки економічних процесів за допомогою методів фрактальної геометрії. *Економічний вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»*. 2017. № 14. URL: <https://doi.org/10.20535/2307-5651.14.2017.108714> (дата звернення: 12.02.2024).
15. Криницька І. В., Krynytska I. Моделювання сценаріїв розвитку підприємства на основі фінансово-економічних оцінок (на прикладі ТОВ «Завод «Ремпобуттехніка»). *Master's thesis*. 2020. URL: <http://elartu.tntu.edu.ua/handle/lib/33443> (дата звернення: 12.02.2024).
16. Лапішко М. Л. Основи фінансово-статистичного аналізу економічних процесів : Підруч. для підготов. мол. спеціалістів. Львів : Світ, 1995. 328 с.

17. Лук'янець О. І. Система прогнозування паводків у Закарпатті на основі дослідження та математичного моделювання процесів формування стоку : автореф. дис. ... канд. геогр. наук. Київ, 2004. 23 с.
18. Лященко О. М. Моніторинг і оптимізація фінансово-економічних процесів в туристичних підприємствах. *Thesis*. 2019. URL: <http://ir.stu.cn.ua/123456789/18937> (дата звернення: 12.02.2024).
19. Макогон В. Д. Бюджетне прогнозування як інструмент державного регулювання економічних процесів. *Бізнес Інформ*. 2017. № 10. С. 314–318.
20. Матушкіна С. В. Специфіка вироблення методів моделювання та прогнозування в дослідженні етнополітичних процесів в Україні. *Політологічний вісник*. 2014. Вип. 76. С. 239–248.
21. Бубенець О. та ін. Моделювання динаміки соціально-економічних процесів. *Thesis*. 2010. URL: <http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/20922> (дата звернення: 13.02.2024).
22. Затонацька Т. та ін. Моделювання та прогнозування імміграційних процесів у сполученому королівстві з використанням ендогенних факторів (pull factors). *Financial and credit activity problems of theory and practice*. 2023. Т. 3, № 50. С. 213–223. URL: <https://doi.org/10.55643/fcaptp.3.50.2023.4065> (дата звернення: 13.02.2024).
23. Москаленко С. О. Прогнозування дощових паводків на річках Правобережжя Прип'яті на основі моделювання процесів їх формування : автореф. дис. ... канд. геогр. наук. Київ, 2013. 23 с.
24. Поліщук О. В. Економіко-математичне моделювання в дослідженні економічних процесів. *Thesis*. 2012. URL: <https://er.nau.edu.ua/handle/NAU/50392> (дата звернення: 13.02.2024).
25. Пономаренко Д. Г., Геселева Н. В. Метод динамічного програмування моделювання економічних процесів. *Thesis*. 2016. URL: <https://er.knutd.edu.ua/handle/123456789/4204> (дата звернення: 13.02.2024).

26. Притула М. М. Моделювання та прогнозування економіко-екологічних процесів: навч.-метод. посіб. Л. : ЛНУ ім. Ів. Франка, 2013. 252 с.
27. Меньяйлов Д. А. та ін. Розроблення алгоритмічного та програмного забезпечення для економетричного моделювання монотонних процесів та прогнозування результатів. *Thesis*. 2017. URL: <http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/64957> (дата звернення: 08.02.2024).
28. Соловйов В. М. Економічна кібернетика: з досвіду моделювання складних фінансово-економічних систем. KEI КНЕУ, 2005. URL: <https://doi.org/10.31812/0564/1052> (дата звернення: 14.02.2024).
29. Соловйов В. М. Моделювання процесів дослідження складності фінансово-економічних систем в контексті формування та використання їх потенціалу. Черкас. нац. ун-т ім. Богд. Хмельн., 2013. URL: <https://doi.org/10.31812/0564/1335> (дата звернення: 14.02.2024).
30. Соловйов В. М., Сапцін В. М., Чабаненко Д. М. Прогнозування фінансово-економічних часових рядів з застосуванням ланцюгів Маркова та Фур'є-продовження. Вид. Ткачук О. В., 2011. URL: <https://doi.org/10.31812/0564/1330> (дата звернення: 14.02.2024).
31. Соловйов В. М., Чабаненко Д. М. Прогнозування фінансово-економічних рядів з застосуванням ланцюгів Маркова. Черкас. нац. ун-т ім. Богд. Хмельн., 2014. URL: <https://doi.org/10.31812/0564/1171> (дата звернення: 14.02.2024).
32. Тарасенко Д. Моделювання еколого-економічних процесів для забезпечення ефективної політики сталого розвитку та зеленої модернізації. *Науковий вісник Одеського національного економічного університету*. 2018. № 11 (263). С. 210–230.
33. Твердохліб І. П. Технологія "data mining" як інструментальний засіб удосконалення методології прогнозування соціально-економічних процесів. *Актуальні проблеми економіки*. 2008. № 12. С. 247–258.

34. Трофімчук М. О. Оцінка впливу війни на вітчизняну економіку та подальші перспективи розвитку фінансово економічних процесів в Україні. *Ekonomika ta derzhava*. 2022. № 6. С. 60–64. URL: <https://doi.org/10.32702/2306-6806.2022.6.60> (дата звернення: 14.02.2024).

35. Хемич Ю. Б. Прогнозування економічних процесів за допомогою PAR моделей. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Економіка*. 2005. Вип. 77/78. С. 91–92.

36. Циганчук Р. О. Моделювання періодичних економічних процесів. *Вісник Університету банківської справи*. 2017. № 2(29). С. 75–79. URL: [https://doi.org/10.18371/2221-755x2\(29\)2017120638](https://doi.org/10.18371/2221-755x2(29)2017120638) (дата звернення: 14.02.2024).

37. Чайковська М. П., Медведь Т. С. Комплексна модель прогнозування стійкості фінансово-економічних установ. *Економічний вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»*. 2015. № 12. URL: <https://doi.org/10.20535/2307-5651.12.2015.44152> (дата звернення: 14.02.2024).

38. Hulivata I. O., Radzichovska L. M. Застосування кейс-технологій при здійсненні математичного моделювання економічних процесів. *COMPUTER-INTEGRATED TECHNOLOGIES: EDUCATION, SCIENCE, PRODUCTION*. 2023. № 50. С. 46–51. URL: <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2023-50-06> (дата звернення: 15.02.2024).

39. Karimov H., Karimov I., Zvonarova K. Some aspects of forecasting socio-economic processes on the basis of modern computer technologies. *Market Infrastructure*. 2020. No. 42. URL: <https://doi.org/10.32843/infrastructure42-66> (дата звернення: 15.02.2024).

40. Kolomiets S., Dinitis R. CHANGING THE PARADIGM OF MODELING AND FORECASTING SOCIO-ECONOMIC SYSTEMS. *Black Sea Economic Studies*. 2021. No. 64. URL: <https://doi.org/10.32843/bses.64-26> (дата звернення: 15.02.2024).

41. Melnyk V. I. Prognostication as a method of research of complex economic phenomena and processes. *THE BULLETIN OF KHARKIV NATION AGRARIAN UNIVERSITY NAMED AFTER V.V.DOKUCHAYEVA. SERIES "ECONOMIC SCIENCES"*. 2020. No. 1. P. 240–250. URL: <https://doi.org/10.31359/2312-3427-2020-1-240> (дата звернення: 15.02.2024).
42. Prykhodko R. P. PREDICTION OF THE STRESS-RUPTURE STRENGTH AND MODELLING OF THE CREEP PROCESSES OF HIGH-TEMPERATURE CREEP-RESISTANT MATERIALS. *Visnik Nacional'noi' akademii' nauk Ukraini*. 2017. No. 02. P. 70–75. URL: <https://doi.org/10.15407/visn2017.02.070> (дата звернення: 01.03.2024).
43. PYTHON FOR DATA PROCESSING AND SIMULATION OF FINANCIAL AND ECONOMIC INDICATORS / T. A. Chupilko et al. *Information technology and computer engineering*. 2021. Vol. 51, no. 2. P. 68–77. URL: <https://doi.org/10.31649/1999-9941-2021-51-2-68-77> (дата звернення: 01.03.2024).
44. Simulation Design of Economic Processes / O. Y. Kuz'min et al. *Nauka ta innovacii*. 2011. Vol. 7, no. 1. P. 16–25. URL: <https://doi.org/10.15407/scin7.01.016> (дата звернення: 02.03.2024).
45. Vdovyn M. METHODS OF STATISTICAL MODELING OF ECONOMIC PROCESSES: A CRITICAL OVERVIEW. *Eastern Europe: economy, business and management*. 2023. No. 1(38). URL: <https://doi.org/10.32782/easterneurope.38-13> (дата звернення: 01.03.2024).
46. Black F., Scholes M. The valuation of option contracts and a test of market efficiency. *Journal of Finance*. 1974. № 27. С. 399–417.
47. Pavlov R. Обґрунтування моделей стохастичного хаосу для підвищення ефективності інвестиційних стратегій на міжнародних фондових ринках. URL: <https://www.researchgate.net/publication/>
48. Borisyuk O. Особливості розвитку фінансового ринку України під час війни. URL: <https://economyandsociety.in.ua/index.php/journal/article/view/3626>

ДОДАТОК А

Цінові зміни



Індекс S&P 500 та VIX



ДОДАТОК Б

Лістинг програми

```

1)HTML
<!DOCTYPE html>
<html lang="ua">
<head>
  <meta charset="UTF-8">
  <title>Title</title>
</head>
<body>
<h1>Зміст</h1>
<div class="toc">
  <ul class="toc-item">
    <li>
      <a href="#Імпорт-необхідних-пакетів" data-toc-modified-id="Імпорт-необхідних-
пакетів-1"><span class="toc-item-num">1&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span>Імпорт необхідних
пакетів</a>
    </li>
    <li>
      <a href="#Імпорт-набору-даних" data-toc-modified-id="Імпорт-набору-даних-2"><span
class="toc-item-num">2&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span>Імпорт набору даних</a>
    </li>
    <li>
      <a href="#Розділення-набору-даних-на-навчальний-та-тестувальний" data-toc-modified-
id="Розділення-набору-даних-на-навчальний-та-тестувальний-3"><span class="toc-item-
num">3&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span>Розділення набору даних на навчальний та тестувальний</a>
    </li>
    <li>
      <a href="#Модель-GARCH" data-toc-modified-id="Модель-GARCH-4"><span class="toc-
item-num">4&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span>Модель GARCH</a>
      <ul class="toc-item">
        <li>
          <a href="#Оцінка-значущих-затримок" data-toc-modified-id="Оцінка-значущих-
затримок-4.1"><span class="toc-item-num">4.1&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span>Оцінка значущих
затримок</a>
        </li>
        <li>
          <a href="#Побудова-моделі-GARCH(2,-2)" data-toc-modified-id="Побудова-моделі-
GARCH(2,-2)-4.2"><span class="toc-item-num">4.2&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span>Побудова моделі
GARCH(2, 2)</a>
        </li>
      </ul>
    </li>
  </ul>
</div>
</body>
</html>

```

2)Python

```

# Імпорт необхідних пакетів в Python
import pandas as pd

```



```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import statsmodels.graphics.tsaplots as sgt
from statsmodels.tsa.stattools import adfuller, kpss
from sklearn.metrics import mean_squared_error, mean_absolute_error,
mean_absolute_percentage_error
from arch import arch_model
import warnings
sns.set()
warnings.filterwarnings("ignore")

## Імпорт набору даних

# In[17]:
file_path = "../data.csv"

# In[18]:
data_backup = pd.read_csv(file_path)
data_backup.Date = pd.to_datetime(data_backup.Date)
data_backup.set_index("Date", inplace=True)

# In[19]:
data = data_backup[["ndx_vol", "ndx_ret"]]

# Розділення набору даних на навчальний та тестувальний

# In[20]:
train_df = data.loc[:"2010-12-31"]
test_df = data.loc["2011-01-01":]

# Модель GARCH

# Оголошення символічних змінних
yt = sp.Symbol('y_t')
yt_1 = sp.Symbol('y_{t-1}')
epsilon_t = sp.Symbol('epsilon_t')
epsilon_t_1 = sp.Symbol('epsilon_{t-1}')
sigma_t = sp.Symbol('sigma_t')
sigma_t_1 = sp.Symbol('sigma_{t-1}')
omega = sp.Symbol('omega')
alpha = [sp.Symbol(f'alpha_{i}') for i in range(1, 4)] # Можна змінити 4 на бажане значення p
beta = [sp.Symbol(f'beta_{j}') for j in range(1, 3)] # Можна змінити 3 на бажане значення q

# Формула GARCH
garch_formula = omega + sp.Add(*[alpha[i] * epsilon_t_12 for i in range(len(alpha))]) +
sp.Add(*[beta[j] * sigma_t_12 for j in range(len(beta))])

# Виведення формули
print("Модель GARCH:")
print(f'Var({yt}|{yt_1}) =  $\sigma^2_t = \{garch\_formula\}$ ')

```

```

# In[21]:
plt.rcParams["figure.figsize"] = 18, 5
fig, axes = plt.subplots(1, 2)
sgt.plot_pacf(train_df.ndx_ret[1:], zero=False, lags=40, ax=axes[0])
# sgt.plot_pacf(train_df.ndx_ret[1:].abs(), zero=False, lags=40, ax=axes[1])
sgt.plot_pacf(train_df.ndx_vol[1:], zero=False, lags=40, ax=axes[1])
axes[0].set_title("PACF для доходності", size=24)
axes[1].set_title("PACF для квадратів доходності (волатильність)", size=24)
plt.show()

# Оглядаючи графіки PACF для доходності та волатильності, очевидно, що перші дві
затримки є дуже значущими, а далі значущість знижується. Тому ми будемо будувати
модель GARCH(2, 2).

# Побудова моделі GARCH(2, 2)

# Підготовка даних

# In[22]:
garch_df = pd.DataFrame(data["ndx_ret"].shift(1).loc[data.index])
garch_df.at[train_df.index, "ndx_ret"] = train_df["ndx_ret"]

# Інстанціювання моделі

# In[23]:
model = arch_model(garch_df["ndx_ret"][1:], p=2, q=2, vol="EGARCH", dist="studentst")
model_results = model.fit(last_obs=test_df.index[0], update_freq=5)

# Сумарна інформація про модель

# In[24]:
model_results.summary()

# Прогнозування моделі

# In[25]:
predictions_df = test_df.copy()
predictions_df["Predictions"] = model_results.forecast().residual_variance.loc[test_df.index]

# Побудова графіку прогнозів

# In[26]:
plt.rcParams["figure.figsize"] = 18, 5
plt.plot(predictions_df["ndx_ret"].abs())
plt.plot(predictions_df["Predictions"])
plt.title("Фактичні значення проти прогнозів для волатильності NDX", size=24)
plt.show()

# RMSE (корінь середньоквадратичної помилки)

```



```
# In[27]:  
np.sqrt(mean_squared_error(predictions_df["ndx_ret"].abs(), predictions_df["Predictions"]))  
mean_absolute_percentage_error(predictions_df["ndx_ret"].abs(), predictions_df["Predictions"])
```

MAE (середня абсолютна помилка)

```
# In[28]:  
mean_absolute_error(predictions_df["ndx_ret"].abs(), predictions_df["Predictions"])  
# Обчислення середньої абсолютної помилки  
mean_absolute_error = sp.Symbol('mean_absolute_error')  
mean_absolute_error_value = sp.Abs(predictions_df["ndx_ret"].abs() -  
predictions_df["Predictions"]).mean()  
  
print(f'Середня абсолютна помилка: {mean_absolute_error_value}')
```

ДОДАТОК В

Date	Price	Open	High	Low	Volume
01.01.2023	11,584.55	10,562.06	11,691.89	10,265.04	19.91B
01.02.2023	11,455.54	11,573.14	12,269.56	11,334.47	19.32B
01.03.2023	12,221.91	11,447.58	12,227.93	10,982.80	25.37B
01.04.2023	12,226.58	12,146.09	12,245.43	11,798.77	17.28B
01.05.2023	12,935.28	12,210.05	13,154.29	11,925.37	21.61B
01.06.2023	13,787.92	12,944.46	13,864.06	12,903.63	25.04B
01.07.2023	14,346.02	13,798.70	14,446.55	13,567.25	19.25B
01.08.2023	14,034.97	14,274.93	14,309.21	13,161.76	21.07B
01.09.2023	13,219.32	14,129.96	14,149.62	12,963.16	19.74B
01.10.2023	12,851.24	13,217.99	13,714.14	12,543.86	19.19B
01.11.2023	14,226.22	12,887.06	14,423.22	12,875.20	19.77B
01.12.2023	15,011.35	14,181.35	15,150.07	14,058.52	23.68B